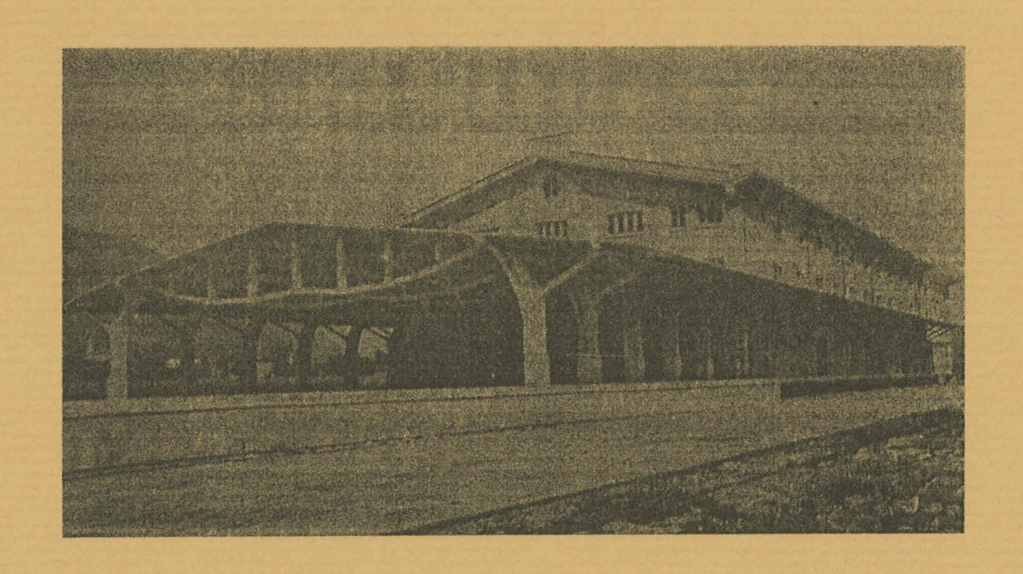
EJERCICIOS DE *PROYECTO DE ESTRUCTURAS* (I)

por

JOSÉ LUIS FERNÁNDEZ CABO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

1-50-01

EJERCICIOS DE
PROYECTO DE ESTRUCTURAS
(I)

por

JOSÉ LUIS FERNÁNDEZ CABO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-50-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
50 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

Ejercicios de Proyecto de Estructuras I

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Edición a cargo de: Marta Zamanillo Rojo
CUADERNO 120.01 / 1-50-01
ISBN: 84-9728-018-0 (obra completa)
ISBN:84-9728-019-9 (Ejercicios de proyecto de estructuras I)
Depósito Legal: M-54667-2001

PRÓLOGO

El presente trabajo recoge ejercicios propuestos y resueltos por el autor, desde el curso 1996/97 hasta el 2000/01, como profesor de la asignatura de *PROYECTO DE ESTRUCTURAS del* plan del 75. Se ha intentado recoger aquellos más significativos; así como recorrer un abanico bastante amplio de la parte teórica más consolidada. Ricardo Aroca ha siso sin duda el gran cocinero de la asignatura; sus planteamientos conducen la teoría de diseño de estructuras hacia parajes de gran abstracción y potencia; así como desgraciadamente poco transitados. Sus escritos al respecto son abundantes pero están en forma de manuscrito no publicado; y en el caso de los artículos publicados los temas no abarcan más que aspectos parciales. Alguno de sus manuscritos, como el elaborado para un curso de doctorado de la Universidad de México, tienen ya una síntesis y depuración bastante avanzada de su trabajo, y es de esperar que no tarden mucho en ver la luz en forma de libro. Hasta la fecha, las únicas publicaciones teóricas al respecto de una cierta amplitud, en donde se complementan ciertos temas, (y dejando a parte las Tesis Doctorales dirigidas también por R. Aroca) son las realizadas por Jaime Cervera.

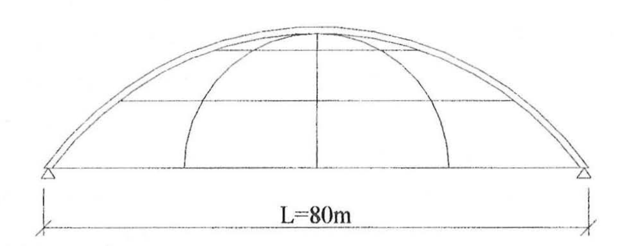
La publicación de ejercicios resueltos, aderezado con explicaciones que complementan la pura resolución, confío que servirá para cubrir una laguna documental y de apoyo a la docencia. Mi experiencia pedagógica es que se trata de conceptos simples pero con muchas interrelaciones entre sí; lo que convierte esta teoría en algo de difícil asimilación por parte del alumno.

Edición a cargo de:
MARTA ZAMANILLO ROJO

EJERCICIO 3 (TEST Nº 3 CURSO 97-98)

Después de medir el peso propio de una bóveda triangulada metálica, y dado que conocíamos su carga exterior, hemos obtenido el valor de $\frac{\wp_{pp}}{\wp_{ext}} = k = \frac{1}{5}$

(k es un valor constante)



3.a.- ¿Cuál es el tamaño máximo de esa estructura por resistencia?

k = 1/5

$$\frac{\wp_{pp}}{\wp_{ext}} = k = \frac{L}{(L_{max} - L)} \Longrightarrow L_{max} = \frac{L(k+1)}{k} = \frac{80.\left(\frac{1}{5}+1\right)}{\frac{1}{5}} = 480m$$

L_{max}= 480 m $\longrightarrow$ $\frac{80}{480} = \frac{1}{6} = 0{,}1\widehat{6}$

Es decir, el tamaño al que se ha construido es ya el tamaño máximo real de dicha estructura, ya que L_{max} real es aproximadamente entre un 0,15 - 0,2 del L_{max} teórico.

3.- ¿Al aumentar de tamaño cumple las condiciones de resistencia, rigidez y estabilidad de la anterior? (También con un cambio semejante).

La carga total es aproximadamente (a efectos de diseño) la suma de la carga de peso propio y la de una fuerza exterior constante por unidad de superficie. Con el cambio de tamaño, la primera produce σ_{pp}, que crece linealmente con la luz, mientras que la segunda da σ_{ext} = cte (al ser la carga exterior constante).

$\sigma_{pp}(0) + \sigma_{ext}(0) = \sigma_{tot}(0)$ Si la estructura crece de forma semejante con un factor α

$\sigma_{pp}(1) + \sigma_{ext}(1) = \alpha.\sigma_{pp}(0) + \sigma_{ext}(0) = \sigma_{tot}(1) > \sigma_{tot}(0)$

Es decir, las tensiones totales son mayores y, por tanto, la deformación será mayor. Además, como la esbeltez de todos los elementos es la misma, el problema de estabilidad empeora, es decir, no cumple las condiciones de resistencia, estabilidad y rigidez de la anterior.
Ahora bien, en función del intervalo de crecimiento de tamaño, esa variación puede ser o no significativa. Podemos ver cual es el incremento de tensiones.

$$\Delta\sigma = \frac{\alpha.\sigma_{pp}(0) + \sigma_{ext}(0)}{\sigma_{pp}(0) + \sigma_{ext}(0)}$$

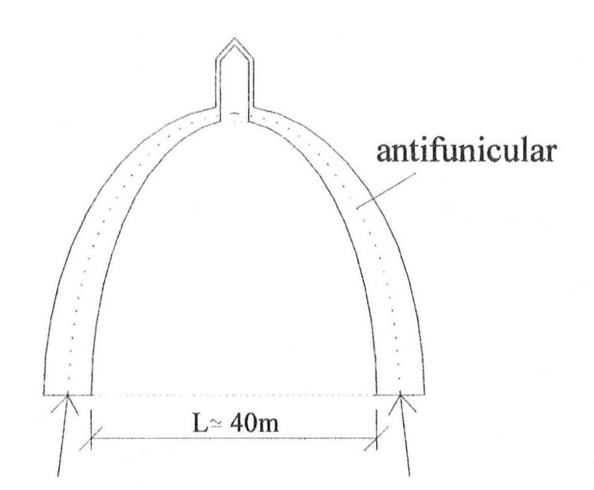
Podemos ver como en esta variación si consideramos distintos valores de (α) y de $\left(\frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{ext}}\right)$.

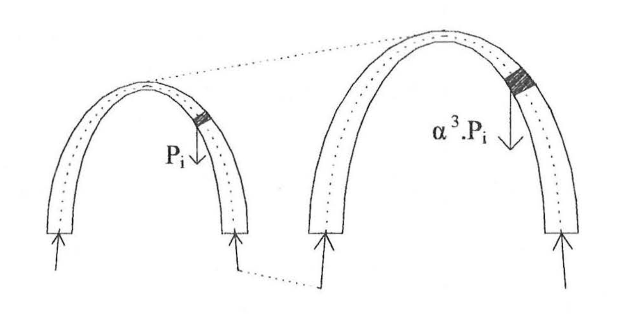
$\Delta\sigma$		α									
		1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$\left(\frac{\sigma_{pp}}{\sigma_{ext}}\right)$	1/20	1,02	1,05	1,07	1,10	1,12	1,15	1,17	1,19	1,21	1,24
	1/15	1,03	1,06	1,09	1,13	1,16	1,19	1,22	1,25	1,28	1,31
	1/10	1,04	1,09	1,14	1,18	1,23	1,27	1,32	1,36	1,41	1,45
	1/5	1,08	1,16	1,25	1,33	1,42	1,5	1,58	1,66	1,75	1,83
	1/ 2,5	1,14	1,29	1,43	1,57	1,71	1,85	2,0	2,14	2,28	2,43
	1/1	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,50

En estructuras de cubierta de construcción usual, con forjados ligeros, podemos tener valores de 1/ 2,5 para luces en torno a 50-60 m. Podríamos llegar a casi el doble sin que los cambios de dimensionado dejasen de ser básicamente proporcionales. En estructuras ligeras de luces pequeñas los cambios pueden ser mucho mayores. Si las fuerzas sísmicas fueran importantes, el incremento de tamaño traería consigo penalizaciones más fuertes. Es decir, el "ojo" es más científico de lo que parece.

EJERCICIO 4 (TEST Nº 3 CURSO 97-98)

Al calcular las tensiones de la cúpula de San Pedro se obtiene un valor máximo de $\sigma = 0{,}4\ N/mm^2$.
Si las tensiones admisibles son de $\sigma = 2$ Mpa, ¿cuál es el tamaño máximo de dicha estructura?





Al hacer un cambio semejante (α), la relación de pesos (P_i/P) no varía, ni tampoco lo hace su posición relativa (L_i/L).

La forma de un funicular depende sólo de las relaciones (P_i/P) y de sus puntos de aplicación relativos (L_i/L). Como esto no cambia, la proporción del antifunicular tampoco.
En este caso, como la condición que debe mantenerse (al menos para el orden de tamaños construidos) es la de estabilidad en el primer orden, y ésta no varía con el cambio semejante (al no variar la proporción del antifunicular), el tamaño máximo por resistencia cumple también estabilidad (lo más crítico)

$$\frac{\sigma_{pp}^{*}}{\sigma_{adm}} = \frac{L}{L_{\max}} \Longrightarrow \frac{k^{*}}{2} = \frac{40}{L_{\max}(m)} \Longrightarrow \frac{0{,}4}{2} = \frac{40}{L_{\max}}$$

*σ_{pp} Las cargas distintas a las de peso propio son despreciables en este problema. Por lo que la carga de peso propio puede ser considerada como la carga total.

$$\sigma_{total} \approx \sigma_{pp}\ ; \Longrightarrow \sigma_{pp} \approx 0{,}4\ N/\ mm^2$$

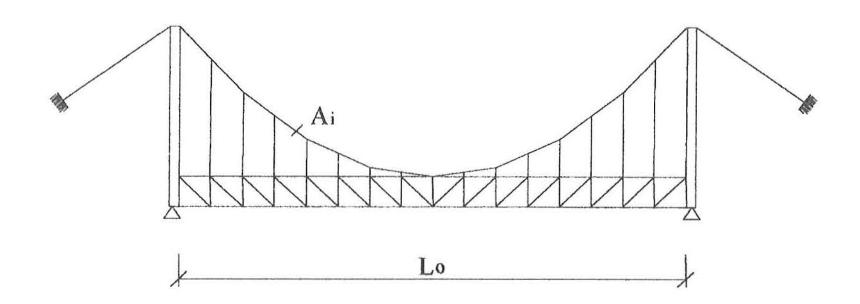
Las tensiones en la base son del orden de $0{,}4\ N/mm^2$, con lo que

$$\frac{0{,}4}{2} = \frac{40}{L_{\max}} \Longrightarrow L_{\max} = \frac{80}{0{,}4} = 200m$$

Además, a medida que la estructura se hace más grande, las variaciones del antifunicular debido a las cargas exteriores irán disminuyendo. Es decir, las cargas exteriores varían con L^2 y las de peso con L^3. Habría que hacer una salvedad de cierta importancia. Si estuviésemos en zona sísmica, con aceleraciones importantes, esos incrementos de tamaño nos irían separando más y más el antifunicular de las fuerzas exteriores (sismo incluido) que el de las fuerzas gravitatorias.

EJERCICIO 5 (TEST Nº 3 CURSO 97-98)

Si las tensiones debidas al peso propio para un tamaño (L_0) son de valor σ =x Mpa, ¿cuánto valdrán dichas tensiones si se multiplican todas las longitudes de las barras y cables por dos y se reducen todas las secciones a la mitad?

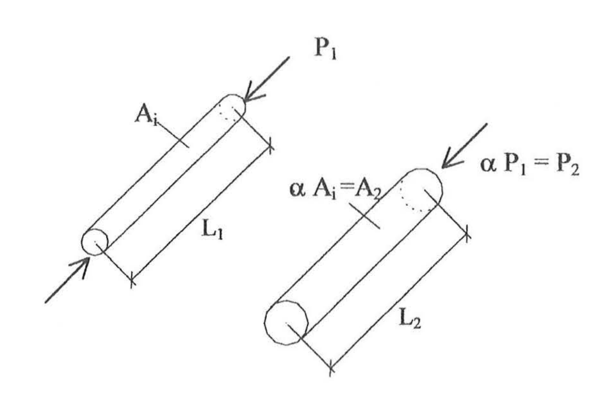


Si se cambia la geometría de tamaño de forma semejante:

$\sigma_{pp} = k.L$ $\qquad \dfrac{\sigma_o}{L_o} = \dfrac{\sigma_1}{L_1}$; y en esto no influye el dimensionado.

$\dfrac{x}{L_o} = \dfrac{\sigma_1}{2L_o}$ $\qquad \sigma_1 = 2.\sigma_o = 2x$

El dimensionado no influye en las tensiones debidas al peso propio por lo que la variación de las (A_i) no importa en absoluto.
Veámoslo:



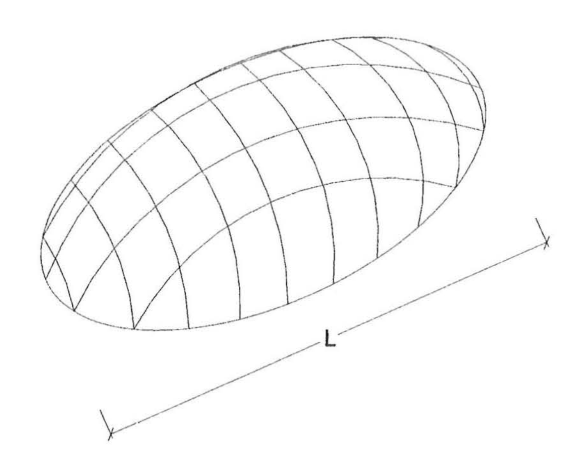
Si se varía el dimensionado de forma uniforme (α), las fuerzas debidas al peso propio crecen también con (α).

$$\sigma_{pp}(2) = \frac{P_2}{A_2} = \frac{\alpha.P_1}{\alpha.A_1} = \frac{P_1}{A_1} = \sigma_{pp}(1)$$

Hay, sin embargo, una cuestión de matiz de una cierta relevancia. Si la variación del dimensionado no es uniforme, se produce una variación en la fracción de carga que lleva cada barra y, por tanto, $P_2 \neq \alpha P_1$, estrictamente hablando. En la práctica este efecto es despreciable frente a las variaciones de tensión debidas al tamaño. Esta es una de las pequeñas "trampas" del proceso teórico, que permiten simplificar notablemente las relaciones de las variables.

EJERCICIO 2 (TEST Nº 3 CURSO 98-99)

Se ha pesado una cúpula de barras de 200 m de luz y se ha encontrado que el peso total de la estructura es una quinta parte del peso total de las cargas exteriores. Si la estructura estaba dimensionada al 80% de su capacidad en todas las barras, ¿cuál es el tamaño máximo de la estructura?

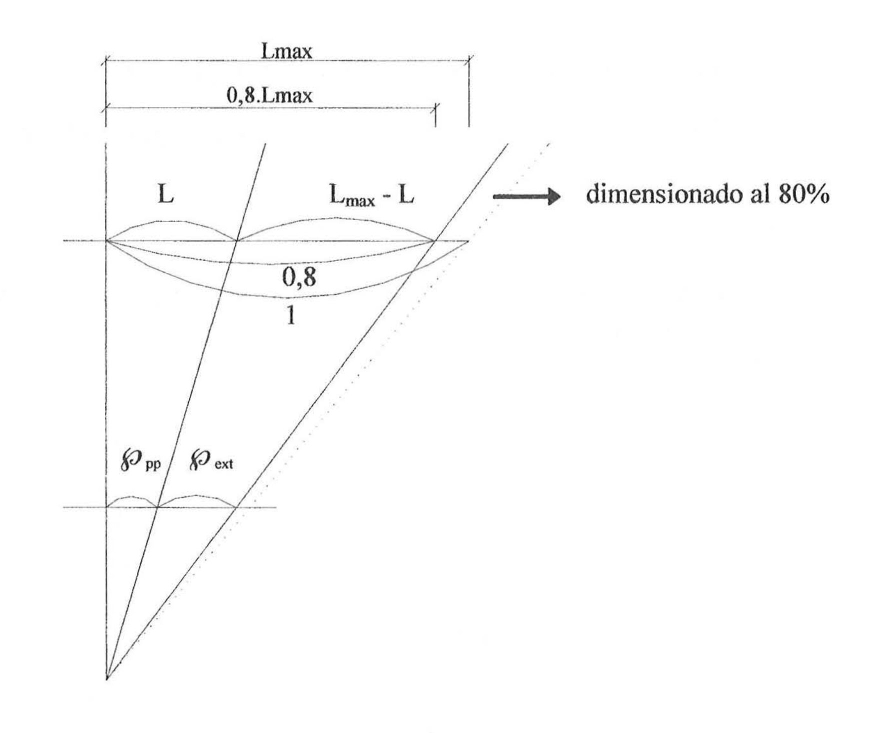


L =200 m

$$\wp_{\wp\wp} = \frac{1}{5}\cdot\wp_{ext}$$

$$\frac{0{,}8.L_{max}}{\wp_{\wp\wp} + 5\wp_{\wp\wp}} = \frac{L}{\wp_{\wp\wp}}$$

$$\frac{0{,}8.L_{max}}{6.\wp_{\wp\wp}} = \frac{L}{\wp_{\wp\wp}}$$



$$L = 200m$$

$$L_{max} = \frac{6L}{0{,}8} = \frac{1200}{0{,}8} = 1500m$$

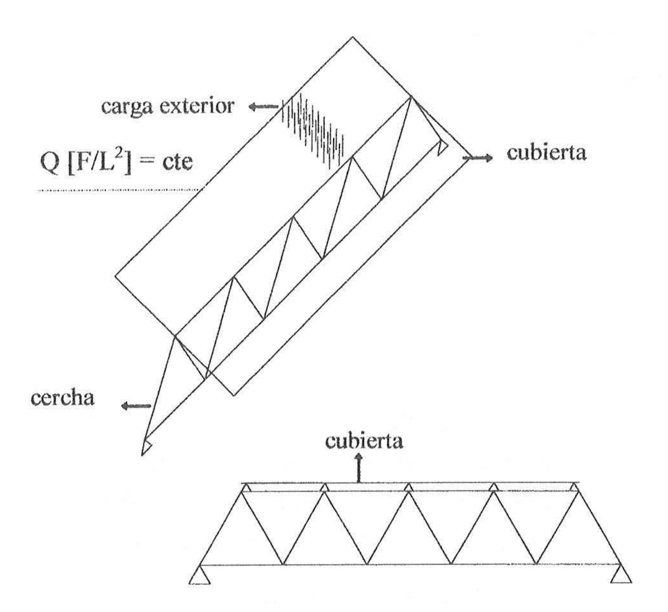
L_{max} =1500m

Aquí vemos una aplicación clara del uso de la herramienta teórica en combinación con el dato empírico. Esta es una forma muy sencilla de obtener tamaños máximos teóricos sin necesidad de realizar cálculos complicados.

De nuevo podemos recalcar que un valor de $\wp_{pp} = \frac{1}{5}\wp_{ext}$ indica que estamos en valores del orden de tamaños máximos reales razonables. En la práctica y, como puede verse, en las grandes estructuras puede ocurrir que $\wp_{tot} = \wp_{ext}$, o que incluso $\wp_{tot} > \wp_{ext}$,.

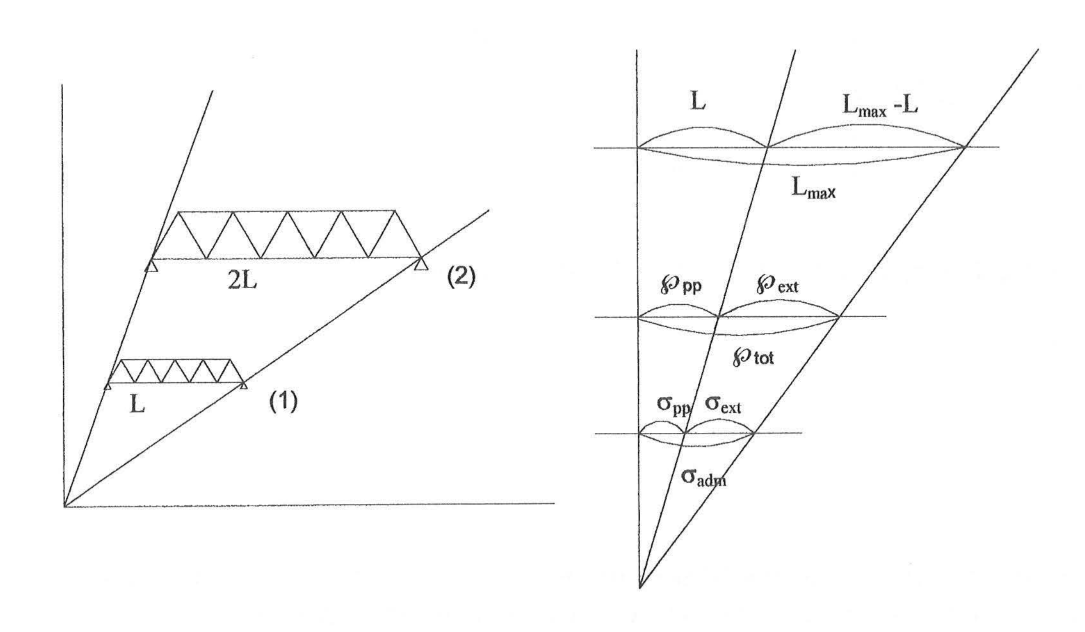
EJERCICIO 4 (TEST Nº 3 CURSO 98-99)

En la cercha de la figura, que ha sido diseñada estrictamente a una tensión normal de 170 N/ mm^2, el peso total de la misma es una sexta parte de las cargas exteriores. Prescindiremos del peso propio de la estructura secundaria de la cubierta, que se considera como carga exterior constante.



Si hacemos un cambio de tamaño semejante donde todas las medidas crezcan al doble (incluyendo las medidas que definen el dimensionado), y suponiendo que la carga exterior es constante por unidad de superficie:
¿Cuál será el nuevo valor de las tensiones totales después de haber realizado el aumento de tamaño?

Dimensionado estricto



L = tamaño
L_{max}= tamaño máximo
$\wp_{tot}$ = carga total
$\wp_{pp}$ = carga de peso propio
$\wp_{ext}$ = carga exterior
σ_{pp} = tensiones debidas al peso propio
σ_{ext} = tensiones que quedan para resistir las cargas exteriores e iguales a las tensiones de a las cargas exteriores si el dimensionado es estricto

Datos:
$\sigma(1)_{TOTAL} = 170$ N/ mm^2

$$\wp_{\wp\wp}(1) = \frac{1}{6} . \wp_{ext}$$

Resolución:

[A] _ $\sigma(1)_{TOTAL} = 170 = \sigma_{pp}(1) + \sigma_{ext}(1)$

[B] _ $\sigma(2)_{TOTAL} = 2\,\sigma_{pp}(1) + \sigma_{ext}(1)$

$\wp_{ext} \Rightarrow$ tipo [F/ L^2] $\Rightarrow \sigma_{ext}$ =cte. con el cambio de tamaño, ya que para un cambio α semejante la carga crece α^2 y el área también crece con $\alpha^2 \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = cte$

Las σ_{pp} crecen linealmente con el tamaño.

[A] _ $170 = \sigma_{pp}(1) + \sigma_{ext}(1) \Rightarrow \sigma_{pp}(1) = \frac{1}{6}\sigma_{ext}(1)$

$$170 = \frac{1}{6}\sigma_{ext}(1) + \sigma_{ext}(1) \quad \begin{cases} \sigma_{ext}(1) = 145{,}7 \dfrac{N}{mm^2} \\ \sigma_{pp}(1) = 24{,}3 \dfrac{N}{mm^2} \end{cases}$$

$\sigma(2)_{TOTAL} = 170 = 2\,\sigma_{pp}(1) + \sigma_{ext}(1) = 2\,.24{,}3 + 145{,}7 = 194{,}3$ N/ mm^2

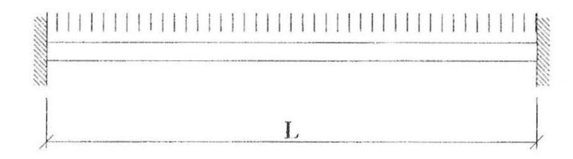
$\sigma(2)_{TOTAL} = 14{,}3$ N/mm^2

$$\Delta\sigma = \frac{194{,}3}{170} = 1{,}1$$

NOTA:
Para resolver el problema hemos prescindido del peso propio de los elementos secundarios. Esto da un cierto error pero no muy grande. El motivo es que, generalmente, los elementos secundarios se mueven en rangos de tamaños similares y, es el elemento principal el que puede variar fuertemente su luz.

EJERCICIOS 4 y 5 (TEST Nº 3 CURSO 99-00)

4.- Viga biempotrada de canto constante y carga continua (rango elástico). ¿Cuál será la λ_{lim} si $\varepsilon = 1,3.\ 10^{-3}$ y $\delta / L = 1/300$, si el dimensionado es **constante**?



Sabemos:

Para $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta}{L} = \dfrac{1}{500} \\ \varepsilon = 0{,}8.10^{-3} \end{array} \right\}$ $\lambda_{lim} = 40$

$\dfrac{\delta}{L} = k.\varepsilon.\lambda$ ⟹ Si ε aumenta la esbeltez λ disminuye; entonces, debido a ε la nueva λ_{lim} será:

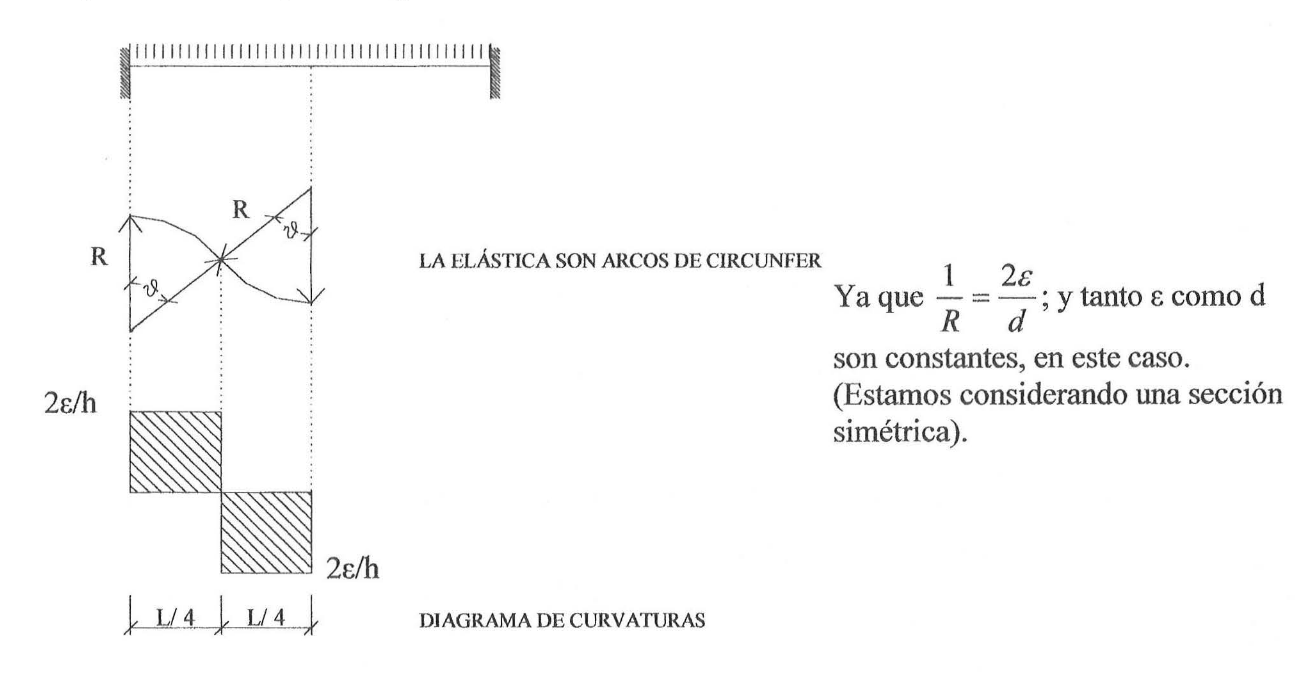
$$\lambda' = 40.\frac{0{,}8}{1{,}3} = 24{,}615$$

Como además δ / L aumenta ⟶ λ también aumenta

$$\boxed{\lambda'' = 24{,}615.\frac{500}{300} = 41{,}02}$$

5.- . ¿Cuál será la λ_{lim} si el dimensionado **es estricto**?

La situación de dimensionado estricto sólo puede plantearse en los cordones de cerchas de gran luz y, aún así, ni siquiera llegaremos a variar tramo a tramo el dimensionado.



Ya que $\dfrac{1}{R} = \dfrac{2\varepsilon}{d}$; y tanto ε como d son constantes, en este caso. (Estamos considerando una sección simétrica).

Dimensionado estricto:

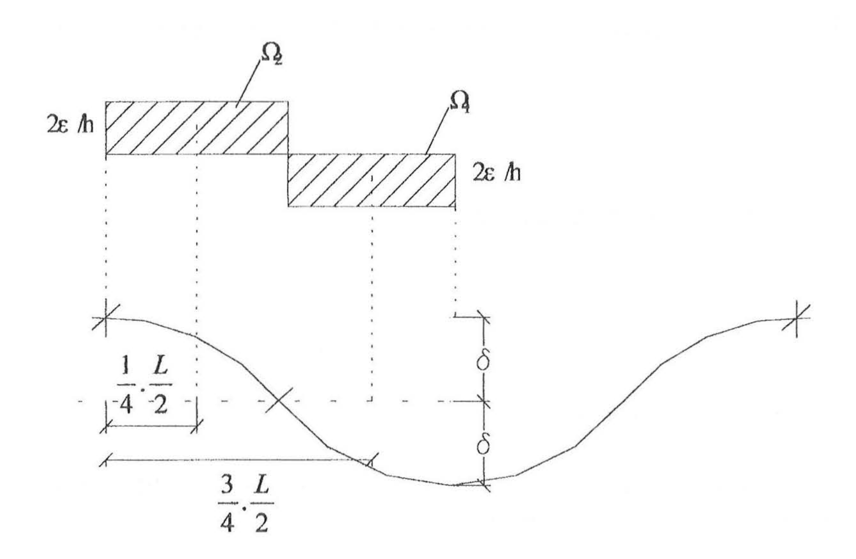
$$\frac{1}{R} = \frac{2\varepsilon}{h} = cte.$$

$$\delta = \underbrace{\frac{2.\varepsilon}{h}.\frac{L}{4}}_{\Omega}.\underbrace{\frac{3}{4}.\frac{L}{2}}_{X} - \underbrace{\frac{2.\varepsilon}{h}.\frac{L}{4}}_{\Omega}.\underbrace{\frac{1}{4}.\frac{L}{2}}_{X}$$

Ω = área de curvaturas.
x = distancia del c.d.g de Ω al punto en el que calculamos δ.

$$\frac{\delta}{L} = \varepsilon.\lambda.\left(\frac{2}{4.4}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{\delta}{L} = \varepsilon.\lambda.\frac{1}{8}}$$

Para $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500}$; $\varepsilon = 0{,}8.10^{-3}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{500}.\frac{8}{0{,}8.10^{-3}} \\ \Omega_1 = \Omega_2 = \frac{2.\varepsilon}{h}.\frac{L}{4} \end{cases}$



Si $\varepsilon = 1{,}3.\ 10^{-3}$ y $\delta / L = 1/300$:

$$\frac{1}{300} = 1{,}3.10^{-3}.\lambda.\frac{1}{8} \Longrightarrow \boxed{\lambda_{lim} = 20{,}51}$$

También podríamos haberlo hecho partiendo de $\lambda = 20$ para $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500}$ y $\varepsilon = 0{,}8.10^{-3}$

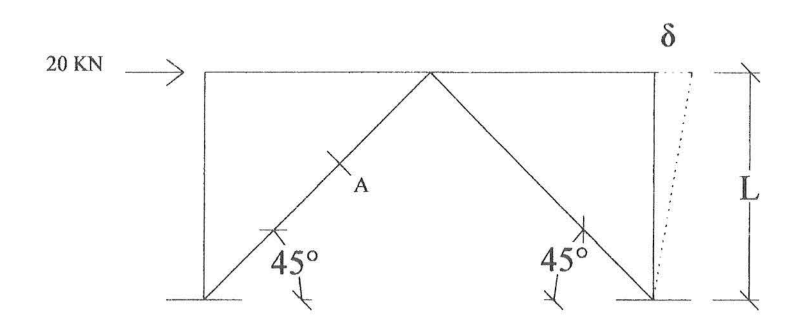
$$\lambda_{lim} = 20.\frac{500}{300}.\frac{0{,}8}{1{,}3} = \underline{20{,}51}$$ ya que las relaciones son lineales.

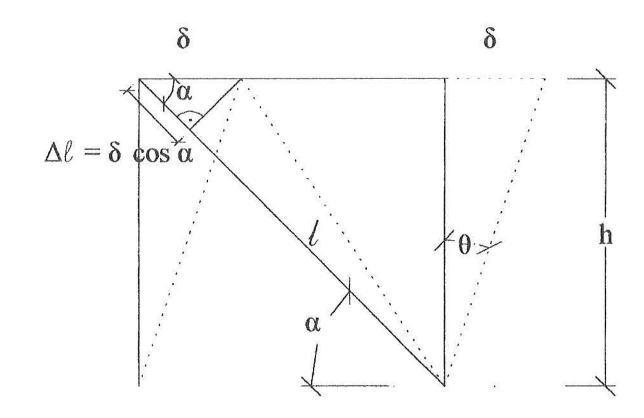
<u>NOTA:</u> La expresión $\frac{\delta}{L} = k.\varepsilon.\lambda$ es obtenida considerando la deformación debida al momento y prescindiendo de la deformación debida al cortante.
Esto es bastante próximo a la realidad en las vigas de perfiles laminados esbeltas usadas en edificación.
También podemos usar esta expresión (en cerchas de cordones paralelos) para calcular la deformación debida a los cordones que, además, es la parte más importante.

EJERCICIO 5 (TEST Nº 6 CURSO 98-99)

Para la estructura de la figura, y suponiendo que la carga de viento en servicio que actúa puede soplar en las dos direcciones, ¿cuál será el valor del área de acero de las diagonales para que el desplazamiento relativo (δ/ L) en cabeza, en esa planta, sea de 1/ 750?

σ_{adm} acero = 170 KN/m^2





$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{.\delta \cos\alpha}{l}$$

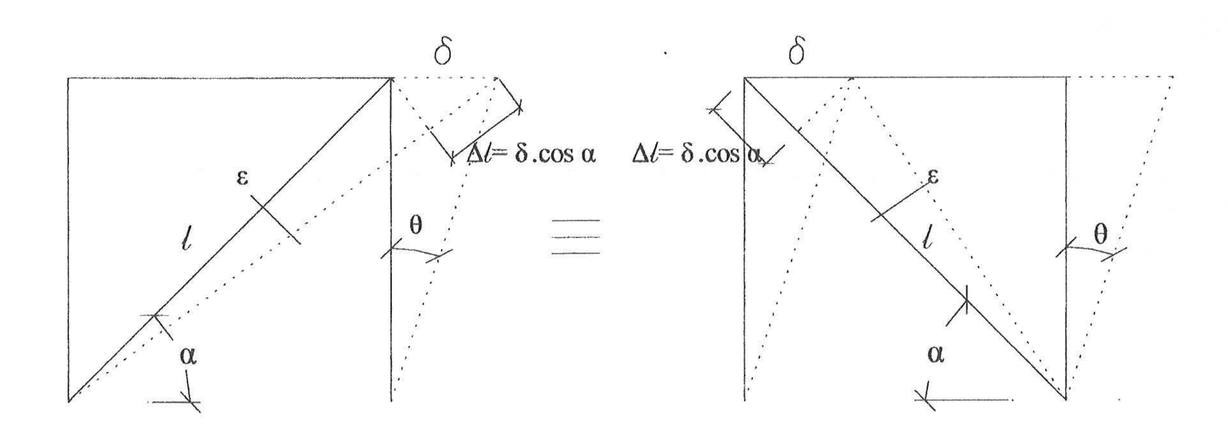
$$\varepsilon = \frac{\delta.\cos\alpha.sen\alpha}{h}$$

$$l.sen\alpha = h$$

$$\frac{\delta}{h} = \theta = \frac{2\varepsilon}{2sen\alpha.\cos\alpha} = \frac{2\varepsilon}{sen2\alpha}$$

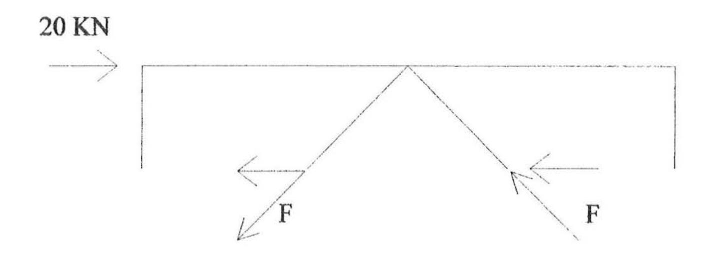
$$\theta = \frac{2.\varepsilon}{sen2\alpha}$$

El problema es simétrico:



$\theta = \frac{2\varepsilon}{sen2\alpha}$ en ambos casos, luego si:

$$\theta = \frac{1}{750} = \frac{2\varepsilon}{sen2\alpha} = \frac{2\varepsilon}{sen90} = 2\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = \frac{1}{2.750} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = E.\varepsilon = \varepsilon.210\frac{KN}{mm^2}$$



$\sum F_H = 0 \longrightarrow \qquad 20KN = 2.A.\sigma.\cos 45 = 2.A.\frac{1}{2.750}.210.\cos 45$

A = 101 mm^2

¿Cuál debería ser el factor de pandeo en este caso?

$$\sigma = E.\varepsilon = 6{,}667.10^{-4}.210\frac{KN}{mm^2} = 139{,}86\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma = \left(\frac{N}{A}\right) = 139{,}86 \longrightarrow \text{Sin pandeo}$$

Si consideramos el pandeo: $\sigma_{adm} = \left(\frac{N.\omega}{A}\right) = 170$

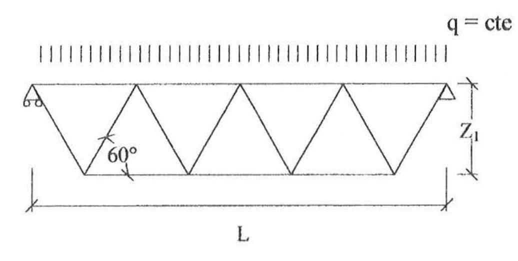
$$139{,}86.\omega = 170 \quad \Longrightarrow \quad \omega \leq \frac{170}{139{,}86} = 1{,}22$$

$\boxed{\omega = 1{,}22}$

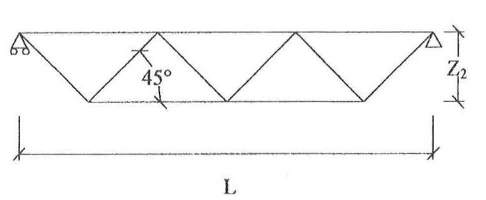
Esto es más razonable; pero además, con la forma de sección adecuada, podríamos obtener valores de ω menores.
Es decir, es un diseño adecuado.

EJERCICIO 3 (TEST Nº 6 CURSO 99-00)

¿Cuál es la relación entre consumos de material a esfuerzo cortante para las dos vigas trianguladas, apoyadas con carga uniforme?



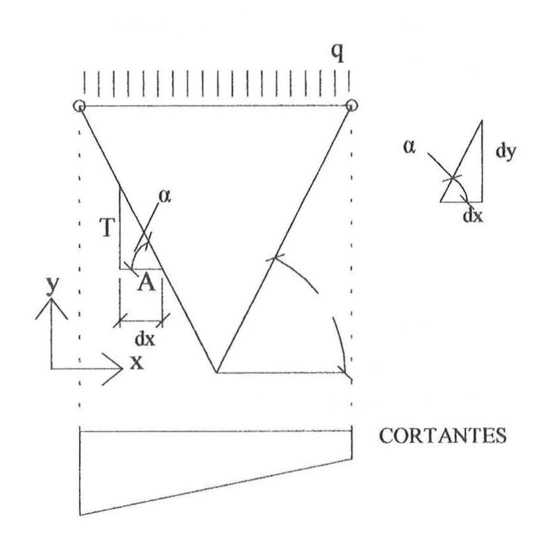
$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha$$



$$\frac{T}{A} = tg\alpha \Rightarrow A = \frac{T}{tg\alpha}$$

Como se trata de cordones paralelos, el cortante T en cada corte debe ser resistido por la componente vertical de las diagonales.

Llamaremos A a la componente horizontal.



$$d\omega = Tdy + A.dx$$

$$d\omega = T.\frac{dy}{dx}.dx + \frac{T}{tg\alpha}.dx = T.\left[tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right].dx$$

$$\omega = \int T.\left[tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right].dx$$

La gráfica de cortantes es variable, de modo que calcularemos el trabajo de la diagonal en un (dx) y luego integraremos.

tg α = cte $\Longrightarrow$ $\omega = \left[tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right]\int T.dx$ $\Longrightarrow$ $\int T.dx$ = área de la gráfica de cortantes $= \breve{T}$

$$\omega = \left[tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right].\breve{T}$$

Si α = 45° ⟶ $\omega = \left[1 + \frac{1}{1}\right].\breve{T} = 2.\breve{T}$

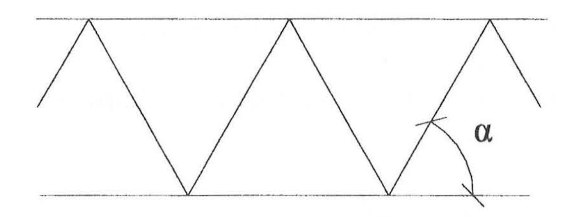
Si α = 60° ⟶ $\omega = \left[\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right].\breve{T} = \frac{4}{\sqrt{3}}.\breve{T}$

De esta manera:

$$\boxed{\frac{\omega_{60}}{\omega_{45}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155}$$

El óptimo teórico (sin pandeo) está en 45°; pero podemos ver que entre 30°-60° no hay variaciones importantes. No obstante, el pandeo afecta más con 30° que con 60°, por lo que al final el óptimo real de la triangulación estará entorno a 60°. Una vez que bajamos o subimos de 30° y 60° el consumo de material se dispara.
El problema es más general de lo que parece.

α	15	30	45	60	75
$\left(tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}\right)$	4	2,31	2	2,31	4

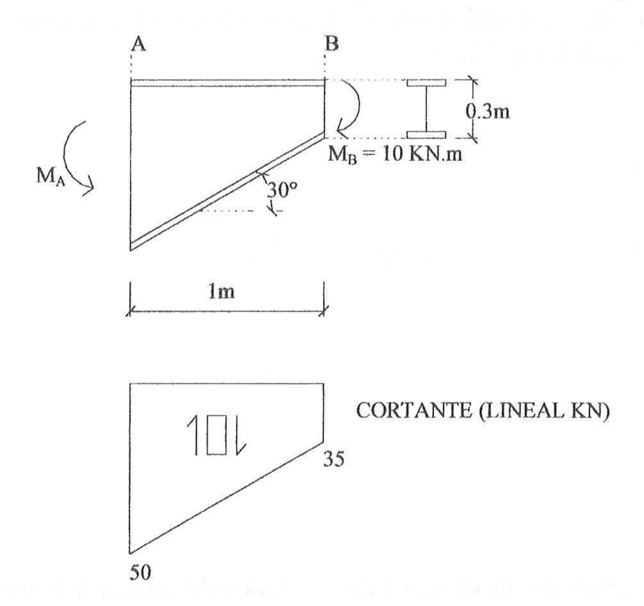


El parámetro clave es que α = cte. (Y que la viga es de cordones paralelos).

Las condiciones de contorno y el tipo de carga no son significativos, puesto que dicha no supone una modificación del área de la gráfica de cortantes $\breve{T}$ (matices aparte).
Es decir, las consecuencias del diseño de la triangulación son generales.

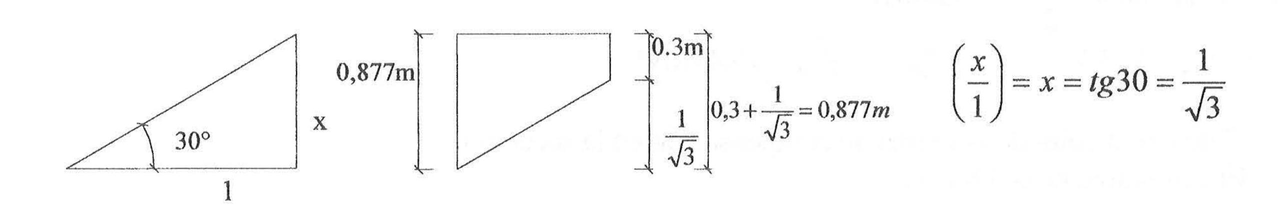
EJERCICIOS 1 Y 2 (TEST Nº 9 CURSO 98-99)

La figura siguiente muestra un tramo de viga acartelada de sección en doble T. Está empotrada en el lado A. Se muestra también la gráfica de cortantes que solicita dicho tramo.



1.- Calcular el valor de la fuerza de compensación en la sección A.

Primero determinamos la geometría completa de la cartela.



M_A = 52,5 KN.m

M_B = 10 KN.m

Es decir,

$$M_A = \underbrace{10}_{M_B} + \underbrace{\frac{(50+35)}{2}.1}_{\int_A^B T(x).dx} = 52,5 KN.m$$

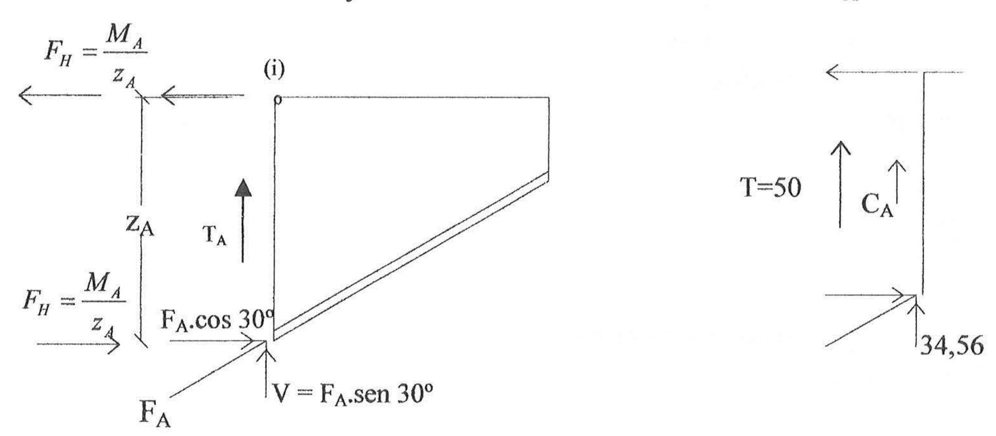
El área de la gráfica de cortantes es el salto de momentos entre A y B,

ya que $M_{AB} = \int_A^B T(x).dx$

Hasta ahora sólo se han determinado todas las solicitaciones de la pieza.

¿Cuál es la fuerza de compensación en A?

El momento M_A equivale a un par de fuerzas $F_H = \frac{M_A}{z_A}$ aplicadas en cada cordón, ya que, por la forma de la sección, el brazo de palanca es casi exactamente el canto de la pieza. Por otra parte, si miramos al cordón inferior, y dado que la componente F_H está fijada, sólo es posible hacer una descomposición de F_H según la dirección del cordón. De este modo, la componente V también está determinada y DEPENDE sólo del MOMENTO M_A.



Como a su vez el cortante T_A = 50 KN es también un valor fijado, el valor de compensación C_A será la diferencia entre el cortante global T y la componente V del cordón inferior.

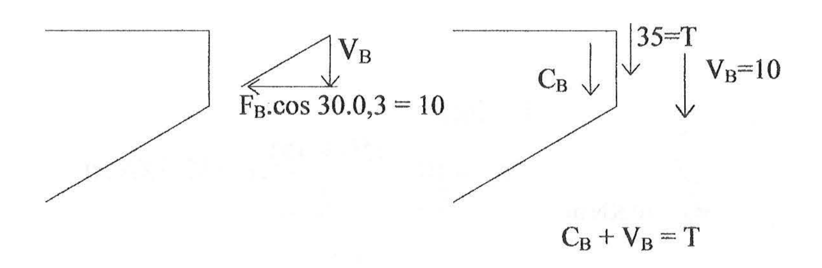
$$\overbrace{F_A.\cos 30}^{F_H}.z_A = M_A$$

$$F_A \frac{\sqrt{3}}{2}.0{,}877 = 52{,}5 \Longrightarrow F_A = 69{,}12KN$$

$$V = F_A sen30 = \frac{69{,}12}{2} = 34{,}56KN$$

$$50 = C_A + 34{,}56 \Longrightarrow \boxed{C_A = 15{,}44KN}$$

2.- Calcular el valor de la fuerza de compensación en la sección B.
El razonamiento es idéntico.



Si las cartelas están colocadas deforma adecuada, la componente V del axil del cordón inferior nos ayuda a resolver el cortante. Esto es lo que se conoce como CORTANTE REDUCIDO, (pues hace que la solicitación en el alma se reduzca).

$$F_B.\cos 30.0{,}3 = 10 \Longrightarrow F_B = 38{,}49KN$$

$$C_B + 19{,}25 = 35 \Longrightarrow \boxed{C_B = 15{,}75KN}$$

EJERCICIOS 1,2,3,4 Y 5 (TEST Nº 4 CURSO 00-01)

Vamos a trabajar sobre una nave diseñada con estructura metálica de acero S-275 JR, con un coeficiente global de fuerzas de $\gamma = 1{,}44$. Como se indica en la figura, la nave tiene 10 m de alto, y una planta de 20 m x15 m. El módulo es de 5 m. La nave está arriostrada con cruces de San Andrés de modo que sólo trabaja el cable que es solicitado en tracción.
La carga total de la cubierta es de 2 KN/m^2; y la de viento en las fachadas (presión + succión) de 1 KN/m^2. Consideraremos que la sección de la cubierta no produce combinaciones de carga desfavorables. Estudiaremos el soporte marcado como A en planta, tanto a carga vertical como a efectos del viento en las dos direcciones.
El soporte A se proyecta con un HEB-240 (ver datos adjuntos). Se supone que la excentricidad inicial de dicho soporte es de (1/300) en relación con su longitud de pandeo en cada dirección. Además habrá que tener en cuenta la deformación por flexión debida al viento. Todos los soportes se consideran articulados en su enlace con la cimentación y la cubierta (cabeza y pie).

Se pide, para el soporte A:

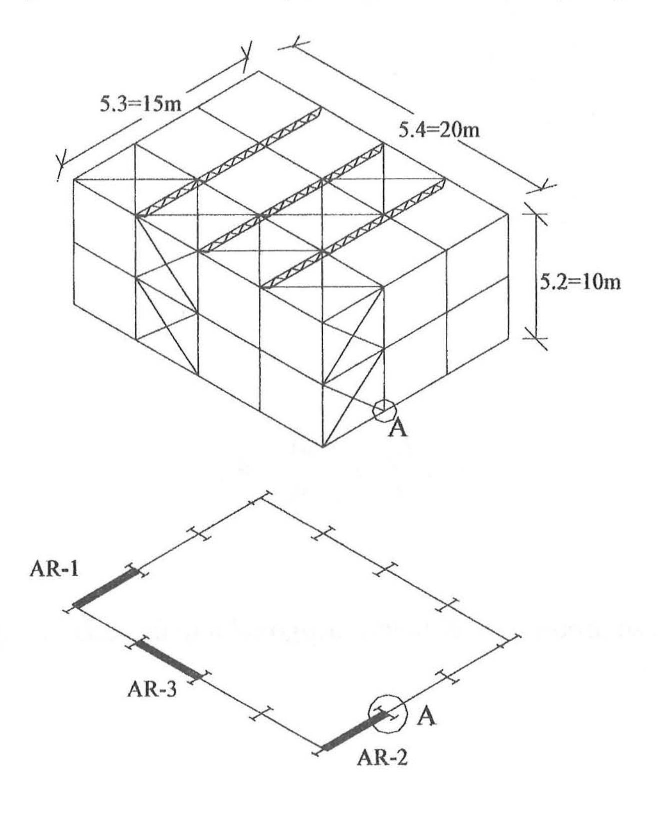
1.- Deformación relativa máxima **inicial** (respecto a su longitud de pandeo) más desfavorable.

2.- Deformación relativa máxima **final** (respecto a su longitud de pandeo) más desfavorable.

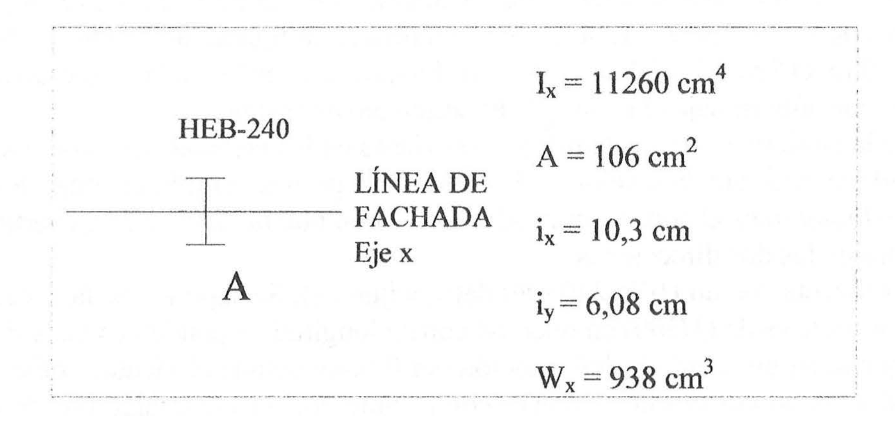
3.- Tensiones totales máximas de cálculo (mayoradas) en dicho soporte A.

4.- Usando la tabla de la figura adjunta, indicar cuál de las secciones sería apropiada desde el punto de vista de diseño.

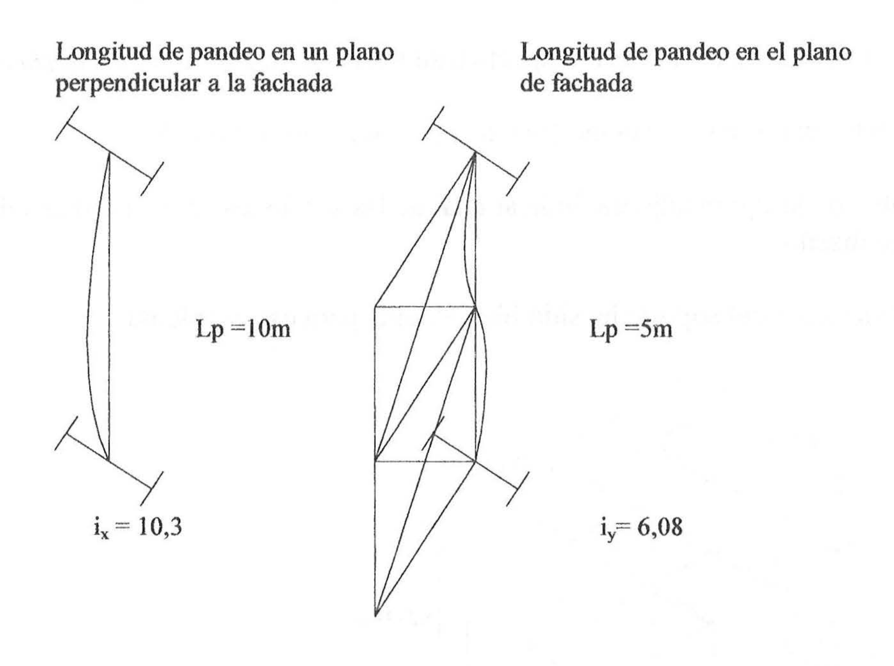
5.- ¿Crees que la sección del soporte ha sido bien elegida para ese problema?



Resolución :



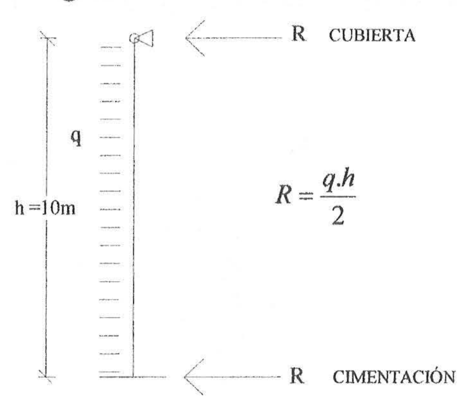
1 y 2.- La cubierta forma un plano rígido, y se han colocado tres planos de arriostramiento en tres fachadas que cumplen la condición de no ser ni paralelos ni concurrentes. El conjunto está, por tanto, perfectamente arriostrado, por lo que los pilares son intraslacionales.



$$\lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{1000}{10,3} = 97 \qquad \lambda = \frac{L_p}{i} = \frac{500}{6,08} = 82$$

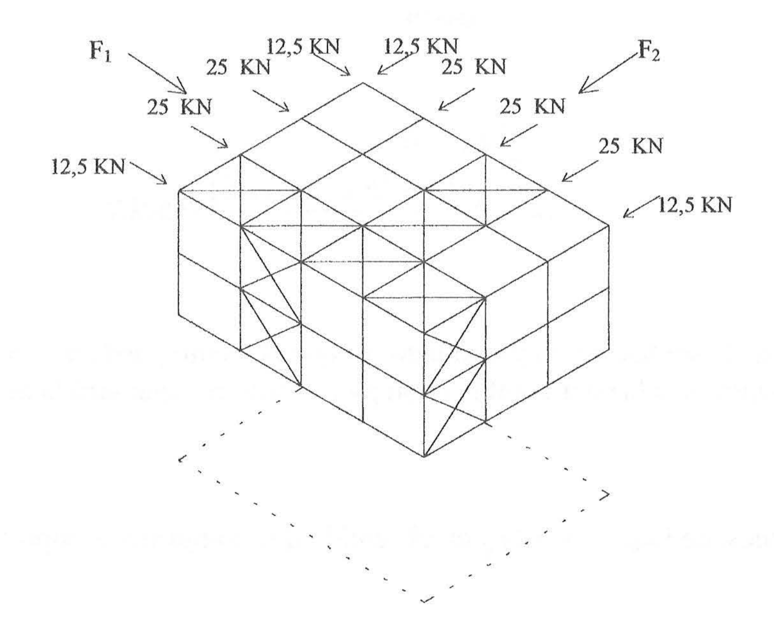
La esbeltez mecánica más desfavorable se produce en el plano ortogonal a la fachada; aunque no hay gran diferencia con la otra dirección.

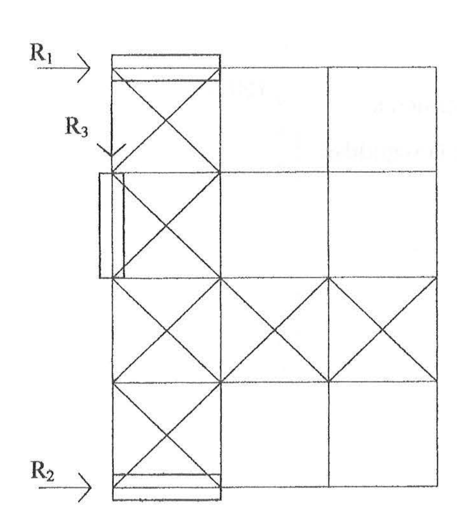
Al estar biarticulados los soportes, las reacciones que deben aportar el paño de cubierta y el de cimentación son idénticos e igual a:



En soportes centrales: $R = 1\frac{KN}{m^2}.5m.\frac{10}{2}m = \frac{50}{2}KN = 25KN$

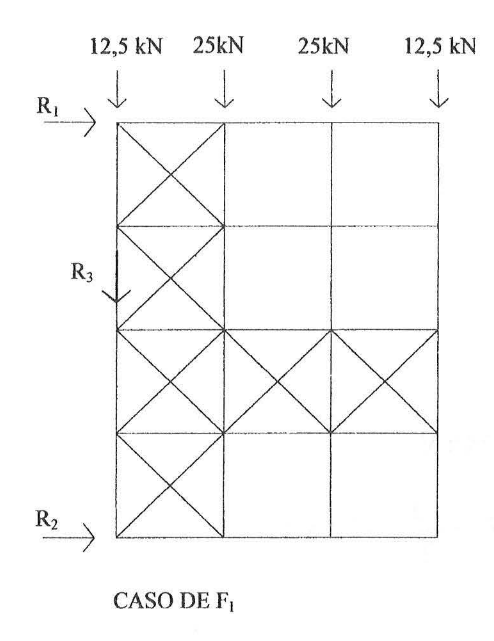
En soportes laterales será aproximadamente la mitad: $R = \frac{25}{2} = 12{,}5KN$



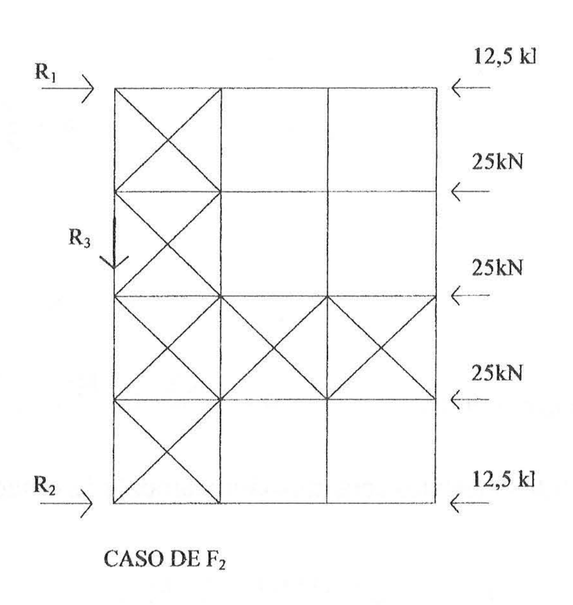


Cada paño de arriostramiento produce una coacción en el plano de fachada, que podemos traducir por tres reacciones R_1, R_2 y R_3 a nivel de dicho plano.

Para obtener el axil del soporte A tendremos que calcular R_2 para las dos hipótesis al viento.



CASO DE F_1



CASO DE F_2

$$\sum M = 0$$

$$R_2 \cdot 20 = (12{,}5 + 25 + 25 + 12{,}5)\frac{15}{2}$$

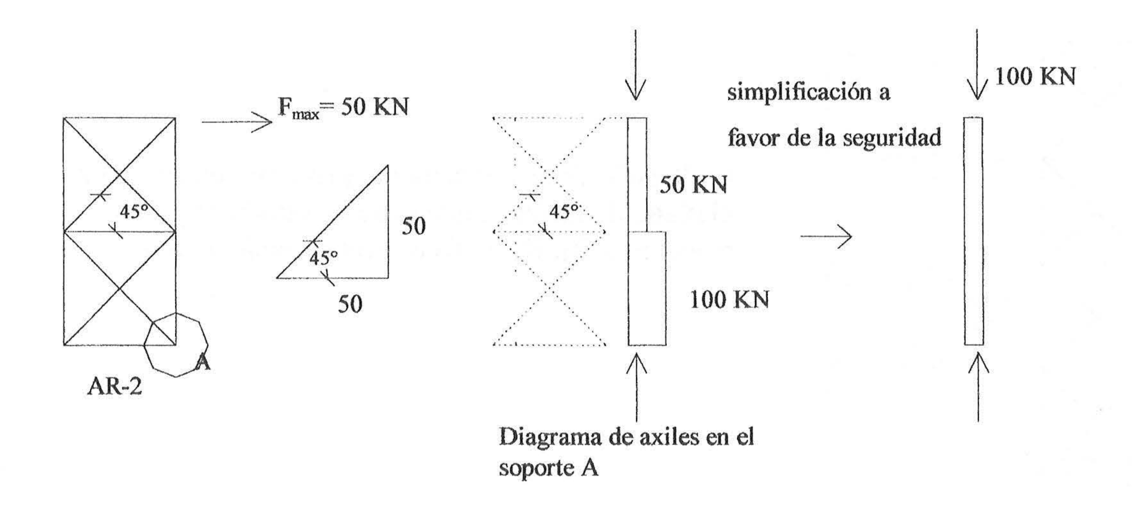
$$R_2 = 28{,}13 kN$$

$$\sum F_X = 0$$

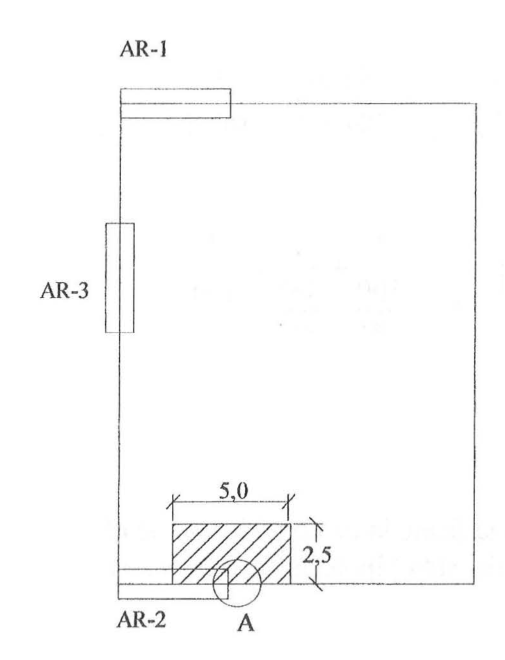
$$R_2 = \frac{(12{,}5 + 25 + 25 + 12{,}5)}{2} = 50kN$$

El sentido de R_2 en ambos casos puede ser hacia uno y otro lado, ya que el viento puede actuar en ambos sentidos. No obstante, elegiremos la peor combinación para el soporte, que será la que lo comprima.

El caso más desfavorable es, entonces, de F_{max} = 50 KN y en el sentido que comprima el soporte A.



Falta considerar ahora el axil debido al peso de la cubierta.

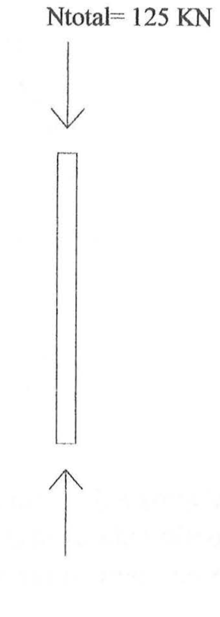


Por carga vertical el pilar A se lleva:

$N_V = 2\ KN/m^2 .\ 5.\ 2,5 = 25\ KN$

Por lo que el axil total será:

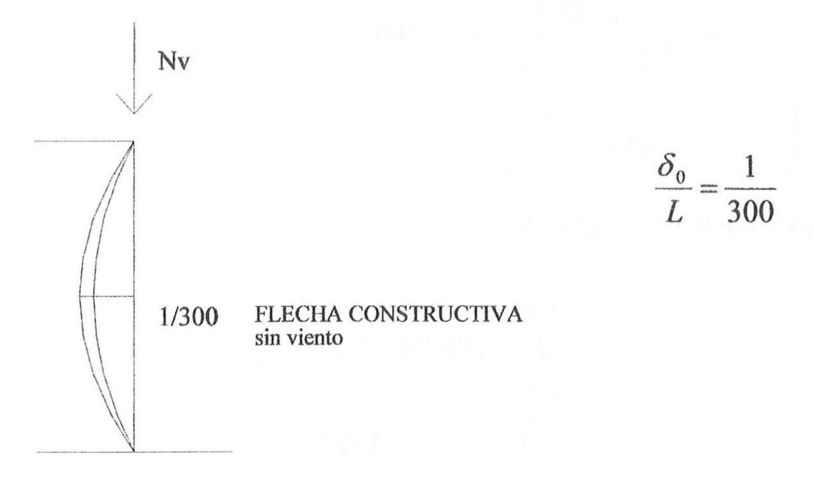
$$N_{VTOT} = \underbrace{100}_{viento} + \overbrace{25}^{c.vertical} = 125kN$$



Calculamos la excentricidad inicial.
Podríamos plantear dos hipótesis, según sea el proceso de entrada en carga:

HIPÓTESIS A

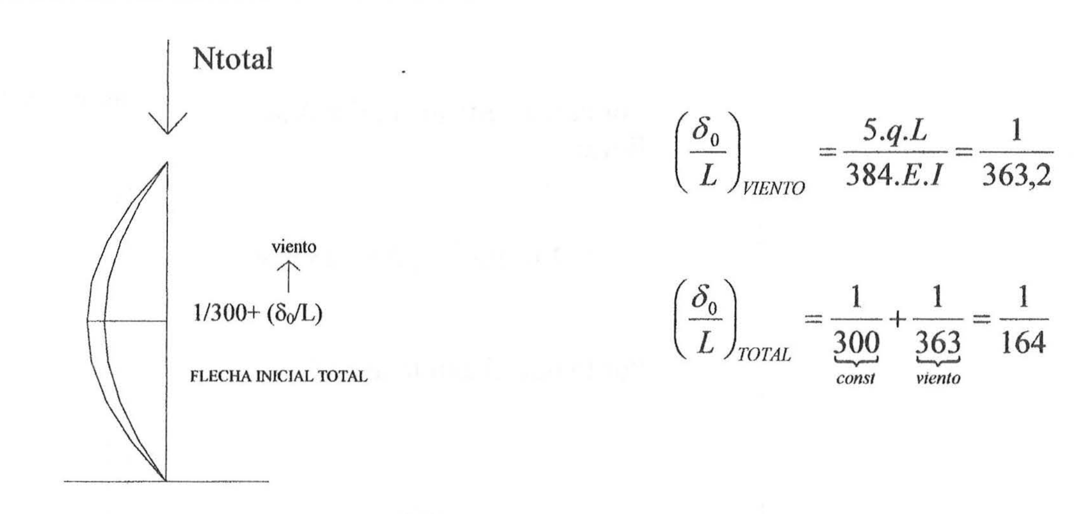
La primera hipótesis es considerar que en el momento de acabar la cubierta no actúa el viento; con lo que la flecha inicial será simplemente la constructiva $\frac{\delta_0}{L} = \frac{1}{300}$ y la carga del soporte será sólo, inicialmente, la debida al viento.



$$\frac{\delta_0}{L} = \frac{1}{300}$$

HIPÓTESIS B

La segunda hipótesis es suponer que en el momento mismo de acabar la cubierta sopla el viento, de modo que la carga vertical será N_{TOTAL} = 125 kN; la flecha inicial, por tanto, será la constructiva más la de viento. Para esta última supondremos que la elástica es de tipo senoidal, aproximación totalmente válida dentro del rango de deformaciones existentes.



$$\left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{VIENTO} = \frac{5.q.L}{384.E.I} = \frac{1}{363,2}$$

$$\left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{TOTAL} = \underbrace{\frac{1}{300}}_{const} + \underbrace{\frac{1}{363}}_{viento} = \frac{1}{164}$$

Vamos a desarrollar ambas hipótesis por separado. Tomamos la licencia de considerar que el coeficiente de seguridad no cambia en ninguno de los estados de cada hipótesis, lo cual no es exacto pero sí razonable.

HIPÓTESIS A

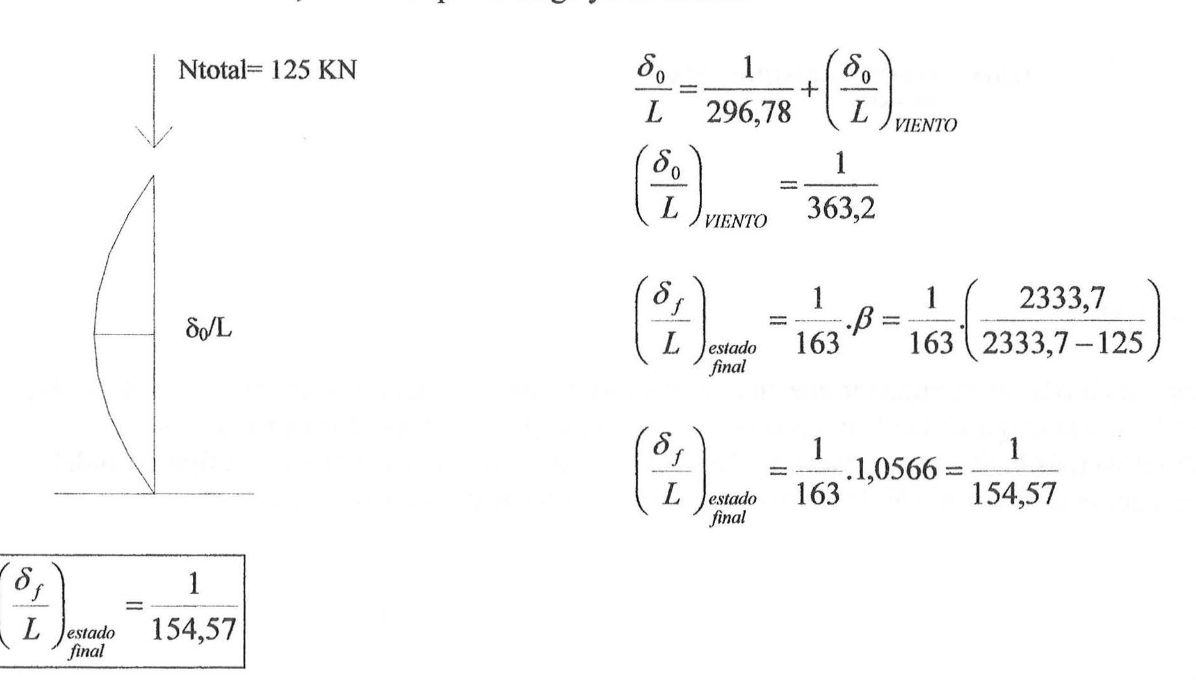
$$\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{\substack{estado\\inicial}} = \frac{1}{300}.\left(\frac{N_{CR}}{N_{CR}-N}\right) \longrightarrow \text{ N es sólo la carga vertical.} \longrightarrow \quad N = N_V$$

$$N_{CR} = \frac{\pi^2.E.I}{L^2} = \frac{\pi^2.210000.11260.10^4}{(10.10^3)^2} = 2333,7KN$$

$$\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{\substack{estado\\inicial}} = \frac{1}{300}.\beta \longrightarrow \quad \beta = \left(\frac{2333,7}{2333,7-25}\right) = 1,0108$$

$$\beta = 1,0108 \Longrightarrow \left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{\substack{estado\\inicial}} = \frac{1}{300}.\beta = \frac{1}{296,78}$$

Ahora actuaría el viento, de modo que la carga ya es la total.



$$\frac{\delta_0}{L} = \frac{1}{296,78} + \left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{VIENTO}$$

$$\left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{VIENTO} = \frac{1}{363,2}$$

$$\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{\substack{estado\\final}} = \frac{1}{163}.\beta = \frac{1}{163}.\left(\frac{2333,7}{2333,7-125}\right)$$

$$\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{\substack{estado\\final}} = \frac{1}{163}.1,0566 = \frac{1}{154,57}$$

$$\boxed{\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{\substack{estado\\final}} = \frac{1}{154,57}}$$

HIPÓTESIS B

$$\left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{TOTAL} = \left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{viento} + \left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{construc} = \frac{1}{300} + \frac{1}{363} = \frac{1}{164}$$

$$\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{TOTAL} = \frac{1}{164}.\beta = \frac{1}{164}.\left(\frac{2333,7}{2333,7-125}\right) = \frac{1}{164}.1,0566 = \frac{1}{155,2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\delta_f}{L}\right)_{TOTAL} = \frac{1}{155,2}}$$

Este valor es prácticamente equivalente al de la hipótesis A. El error al considerar la hipótesis B, en la que $\left(\frac{\delta_0}{L}\right)_{VIENTO}$ entra como inicial, es mínimo, totalmente despreciable. La simplificación de no corregir parcialmente los coeficientes de seguridad en cada etapa tampoco es relevante. Es decir, el proceso constructivo no tiene influencia en este caso (ni usualmente).

3.- Calculamos de las tensiones:

$$\sigma_{máx} = \underbrace{\frac{N.\delta_f}{W} + \frac{N}{A}}_{axil} + \underbrace{\frac{M_{VIENTO}}{W}}_{\substack{flexión\\viento}} \longrightarrow M_{VIENTO} = \frac{q.L^2}{8}$$

$$\left(\frac{\delta_f}{L}\right) = \frac{1}{155} \longrightarrow \delta_f = \frac{10000}{155} = \underline{64,5mm}$$

$$\sigma_{máx} = \underbrace{\underbrace{\frac{125.10^3.64}{938.10^3}\frac{N}{mm^2}}_{8,48} + \underbrace{\frac{125.10^3}{106.10^2}\frac{N}{mm^2}}_{11,78}}_{AXIL} + \underbrace{\frac{62500}{938}\frac{N}{mm^2}}_{66,6}$$

$$\boxed{\sigma_{máx} = 86,88\frac{N}{mm^2}}$$

$\frac{66,6}{86,88} = 0,77 \longrightarrow$ Las flexiones locales debidas al viento dan un 77 % de las tensiones finales. Esto nos está indicando que el soporte no está bien diseñado. No es razonable que ocurra esto cuando, como veremos luego, es un problema fácilmente solucionable.

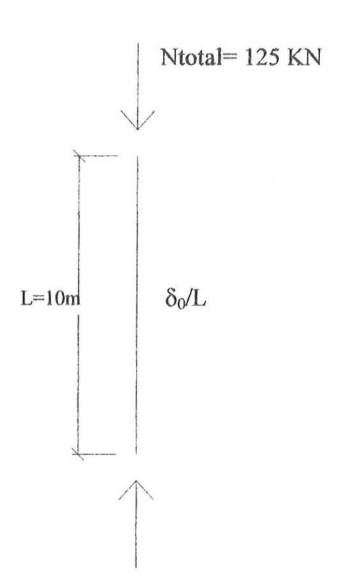
Las tensiones de cálculo son:

$$\boxed{\sigma_d = \underbrace{1,44}_{\substack{\gamma\\mayoración}}.\sigma_{máx} = 125,10\frac{N}{mm^2}} < 275 \text{ N/mm}^2$$

4.- Sección más apropiada (1):

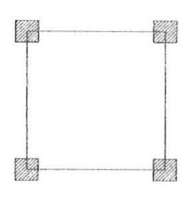
TIPO DE SECCIÓN	Valores de N/L^2 para ω =				
	i / i_0	$\omega = 2$ [k(2)]	ω = 1,25	ω = 1,1	$\omega \approx 1$
	1	100	400	800	1600
	2	25	100	200	400
	3	11	44	90	180
	4	6	25	50	100
	8	1,5	6	12	25
	16	0,4	1,5	3	6
	32	0,1	0,4	0,8	1,5
	64	0,025	0,1	0,2	0,4

(1) La tabla adjunta ha sido tomada de : Aroca Hernández-Ros, Ricardo; *Flexión compuesta y pandeo en barras rectas* ; ETSAM

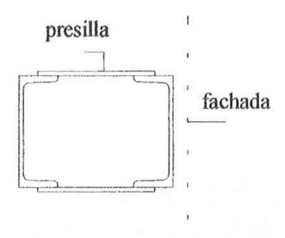


$$\frac{N}{L^2} = \frac{125}{10^2}\frac{KN}{m^2} = 1{,}25\frac{KN}{m^2}$$

Si asumimos un factor de pandeo máximo de $\omega = 2$ (que ya es alto)
y miramos en la tabla adjunta, la sección más apropiada será:

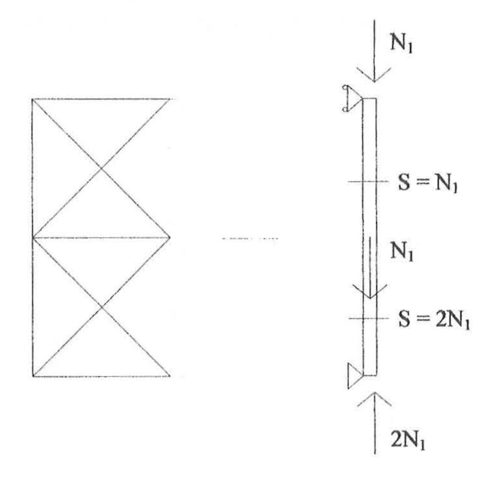


Es decir, tenemos que ir claramente hacia una sección inconexa con un alto radio de giro. Constructivamente este diseño de sección puede ser equivalente a un soporte empresillado del siguiente tipo (o algo similar).



Como veíamos antes, las tensiones debidas a la flexión local de la carga de viento son el 77% de la tensión total. Si separamos los perfiles de forma adecuada esto puede reducirse a un valor más razonable.

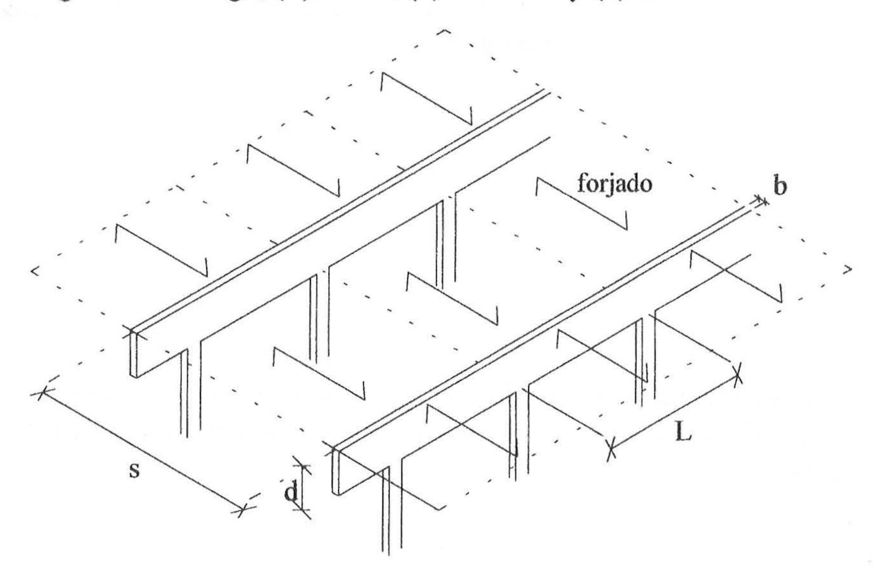
5.- El soporte no está bien elegido ni por pandeo ni por la gran flexión local producida por el viento.
NOTA: El modelo más exacto de pandeo sería(para el plano perpendicular a fachada):



La carga crítica N_{CR} no es exactamente $N_{CR} = \frac{\pi^2.E.I}{L^2}$, pero al hacerlo así se está a favor de la seguridad. En la norma MV-103 puede encontrarse el modelo anterior, pero no merece la pena aproximarse más en este caso.

EJERCICIO 1 (TEST 4 CURSO 97-98)

Se va a realizar una estructura de hormigón armado con luces entre soportes iguales y de gran superficie, por lo que va a ser de utilidad para el diseño establecer las relaciones de resistencia a momento y rigidez. Para un tramo central tipo la condición de flecha relativa será de $\delta/L = 1/500$. Se plantearán estas relaciones a través de las esbelteces λ_s (s/b) y λ_L (L/d), siendo (s) el ancho de carga sobre la viga, (L) la luz, (b) su ancho y (d) su canto útil.

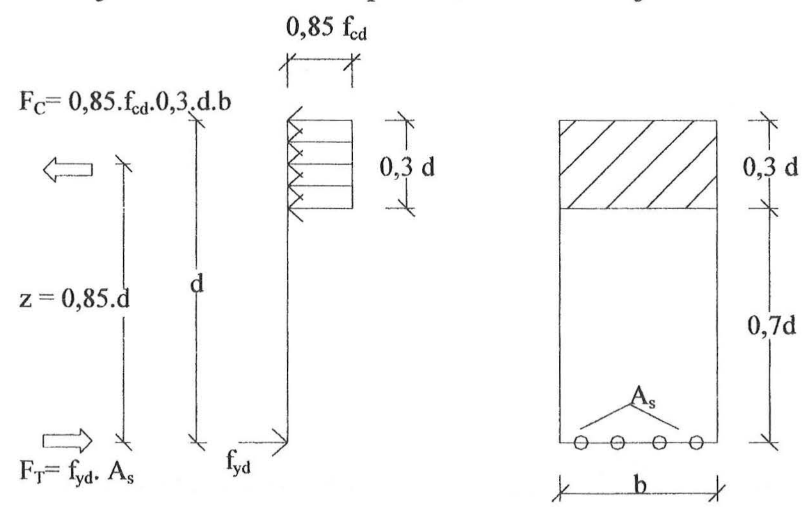


Los materiales a emplear serán los siguientes:

Hormigón armado H-200;
$\rho_e = 26$ KN/m^3
Coeficientes de control normal:
$\gamma_c = 1{,}5$
$\gamma_F = 1{,}6$
Acero AEH-400 S: $\gamma_s = 1{,}1$

Se hace notar que le problema está planteado antes de la aparición de la EHE. De este modo, un H-200 equivale al HA-20 y el acero AEH-40S a un B400S

Es un problema de diseño, por lo que hemos de tomar decisiones a priori que eliminen variables y el problema quede terminado.
No se considera armadura de compresión. Esto es un error mínimo, ya que si la viga está bien diseñada no deberá tener una cuantía importante de armadura comprimida. El modelo de trabajo de la sección es el presentado en el dibujo inferior:



Se considera una altura comprimida de 0,3.d. Esto produce diseños bastante eficaces. Si la viga está bien diseñada (esbeltez adecuada), el brazo de palanca no variará significativamente de $z \approx 0{,}85.d$.
Como rigidez de la pieza de hormigón armado se va a utilizar un valor de (EI) equivalente, considerando la sección bruta, pero que permita trabajar con la sección bruta de hormigón, incorporando los efectos debidos a la flechas diferida y a la fisuración de la pieza. Se considerará para ello que la viga es toda de hormigón, pero con una rigidez equivalente de:

$$(EI)_{EQUIVALENTE} = 0{,}7 \cdot E_s \cdot A_s \cdot d^2 \quad (1)$$

siendo E_s el módulo de Young del acero (21000 KN/cm^2); (A_s) el área de acero y (d) el canto útil de la viga o pieza.
Además, si consideramos el equilibrio de fuerzas en la sección antes dibujada, podemos ver que:

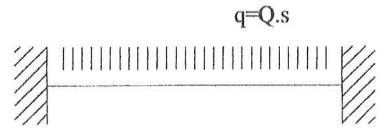
$$\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow A_s \cdot f_{yd} = (0{,}85 \cdot f_{cd} \cdot b\, x \cdot 0{,}3 \cdot d)$$

Consideramos una carga total sin mayorar de $Q = 6{,}5$ KN/m^2.

1.- Suponiendo un tramo en el que la viga sea biempotrada, y considerando una redistribución de momentos del 15% respecto al momento máximo de empotramiento perfecto, se pide:

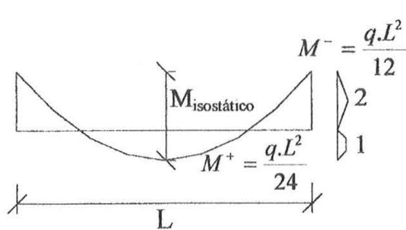
Determinar la condición de resistencia a momento.
Determinar la condición de rigidez.
Determinar la esbeltez límite.
Determinar la esbeltez máxima.

NOTA: Para el cálculo de la rigidez se recomienda utilizar el segundo Teorema de Mohr, aunque puede realizarse por cualquier otro procedimiento.



$Q = 6{,}5$ KN/m^2

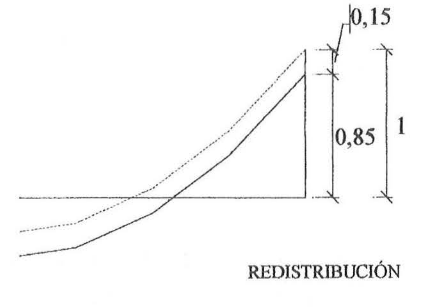
L y s son datos



Relación de M^- y M^+ para empotramiento perfecto.

Si tenemos una redistribución de negativos del 15%:

$$M^-_{max} = 0{,}85.\left(\frac{q.L^2}{12}\right) \approx \frac{qL^2}{14{,}12} = M^-_{max}$$



REDISTRIBUCIÓN

La fisuración de la pieza hace inevitable la existencia de una cierta redistribución. El valor del 15% es recomendado por la normativa.

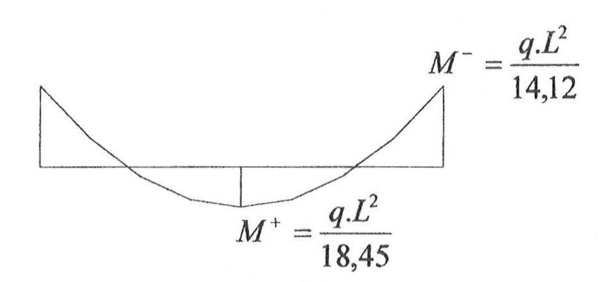
(1) Fórmula aproximada calculada por Jaime Cervera y José Luis de Miguel.

El momento máximo en el vano será:

$$\frac{q.L^2}{14{,}12} + \frac{qL^2}{x} = \frac{qL^2}{8} \Longrightarrow \quad x = 18{,}45 \qquad M^{+}_{\max} = \frac{qL^2}{18{,}45}$$

$$M^{-}_{\max} = \frac{qL^2}{14{,}12} > \frac{q.L^2}{18{,}45}$$

El momento mayor sigue siendo el de negativos.



a) Condición de resistencia a momento. ($q_d = \gamma_f \cdot Q \cdot s = 1{,}6 \cdot 6{,}5 \cdot 5$)

mto. Solicitante $\leq$ mto. Resistente

$$\frac{q_d.L^2}{14{,}12} \qquad \underbrace{0{,}85 f_{cd}.b.0{,}3d}_{fuerza}.\underbrace{0{,}85d}_{\substack{brazo\\ palanca\\ z}}$$

$$\frac{Q.1{,}6.s.L^2}{14{,}12} \leq 0{,}85 f_{cd}.b.0{,}3.d.0{,}85d$$

Agrupando variables y teniendo en cuenta que:

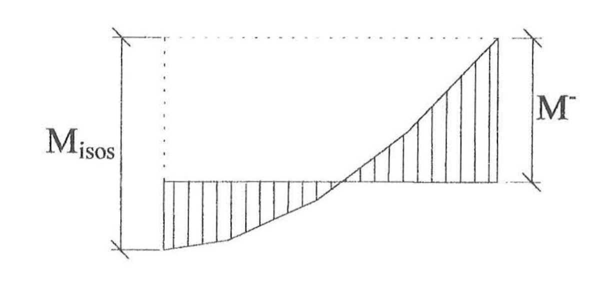
$$\lambda_S = \frac{s}{b} \quad \text{y} \quad \lambda_L = \frac{L}{d}$$

$$\lambda_s.\lambda_L^{\,2} \leq \frac{\overbrace{14{,}12}^{\substack{factor\\ momento}}.\overbrace{0{,}2167}^{\substack{factor\\ sección}}}{\underbrace{1{,}6}_{\substack{mayoración\\ cargas}}}.\frac{f_{cd}}{Q}$$

Al separar los factores podemos rehacer otros casos distintos al analizado. El factor del momento depende del tipo de carga (uniforme en este caso) y de las condiciones de contorno.

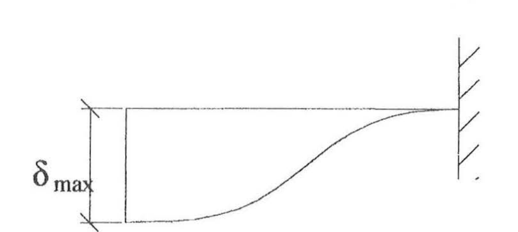
Condición de rigidez. $\frac{\delta}{L} \leq \frac{1}{500}$

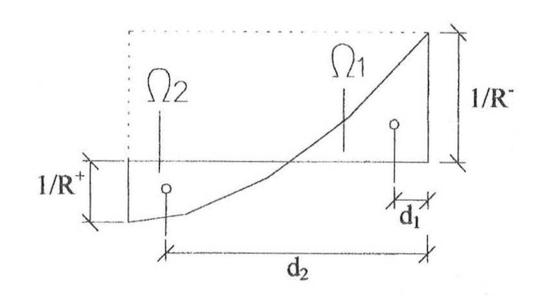
Tomo q sin mayorar ya que se estudiará un estado límite de servicio. (E.L.S) y, por tanto, lo razonable es trabajar con cargas en servicio.



Consideraremos la curvatura como $\dfrac{M}{E.I} = \dfrac{1}{R}$;
pero tomando EI = $(EI)_{equivalente}$, por lo que el área de curvaturas será:

2º Teorema de Mohr (2)





Según el enunciado, se maneja la curvatura a través de la (EI) equivalente, usando la sección bruta.

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{+}_{\max} = \frac{qL^2}{18{,}45}\cdot\frac{1}{(EI)_{equiv}}$$

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{-}_{\max} = \frac{qL^2}{14{,}12}\cdot\frac{1}{(EI)_{equiv}}$$

Ω_1 = área de curvatura de M^{-}
Ω_2 = área de curvatura de M^{+}
d_1 = distancia del c.d.g. de Ω_1 al extremo de cálculo de δ.
d_2 = distancia del c.d.g. de Ω_2 al extremo de cálculo de δ.

O de forma más simple, restando áreas de geometría más sencilla

δ_{max} = (Ω_3 [L/2; $\dfrac{M_{isos}}{(EI)_{equiv}}$; d_3] − Ω_4 [L/2; $\dfrac{M^{-}}{(EI)_{equiv}}$; d_4])

$$\delta_{\max} = (\Omega_2.d_2) - (\Omega_1.d_1)$$

(2) **Recordaremos que el 2º Teorema de Mohr es válido para curvaturas pequeñas, de modo que $\left(\frac{1}{R}\right) \approx y''$;**

cosa que sucede habitualmente.

$$\delta_{\max} = \left(\underbrace{\frac{qL^2}{8.EI}.\frac{2}{3}\frac{L}{2}}_{\Omega_3}.\underbrace{\frac{5}{8}\frac{L}{2}}_{d_3} - \underbrace{\frac{qL^2}{14{,}12.EI}.\frac{L}{2}}_{\Omega_4}.\underbrace{\frac{L}{4}}_{d_4} \right)$$

$$\delta_{\max} = \frac{qL^4}{EI}.\left(\frac{5}{384} - \frac{1}{112{,}96}\right) \approx \frac{qL^4}{EI}.\left(\frac{1}{240}\right)$$

$$\frac{\delta_{\max}}{L} = \frac{qL^3}{\underbrace{EI}_{equivalente}}.\left(\frac{1}{240}\right) = \frac{1}{500} \longrightarrow \text{Condición de rigidez}$$

$$EI = 0{,}7.E_S.A_S.d^2; \qquad A_S = \frac{(0{,}85.F_{cd}.b.0{,}3d)}{f_{yd}}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{Q.s.l^3.f_{yd}}{0{,}7.E_S.0{,}85 f_{cd}.b.0{,}3d.d^2}.\frac{1}{240}$$

$$\lambda_s.\lambda_L^{\ 3} \leq \underbrace{240}_{\substack{cond.\\contorno\\viga}} \cdot \underbrace{\frac{\delta}{L}}_{\substack{\lim.\\rigidez}} \cdot \underbrace{0{,}1785}_{\substack{cond.\\sección}} \cdot \underbrace{\frac{f_{cd}}{f_{yd}}}_{material} \cdot E_S \cdot \underbrace{\frac{1}{Q}}_{carga}$$

c) Esbeltez límite

$\lambda_S.\lambda_L^{\ 2} = k_2$ ⟶ Condición de resistencia

$\lambda_S.\lambda_L^{\ 3} = k_1$ ⟶ Condición de rigidez

$$\frac{\lambda_S.\lambda_L^{\ 3}}{\lambda_S.\lambda_L} = \frac{k_1}{k_2} \Longrightarrow \lambda_{\lim} = \frac{k_1}{k_2}$$

Es decir, es el simple cociente de las dos relaciones anteriores.

d) Esbeltez máxima

$\lambda_S.\lambda_L^{\ 3} \leq k_1$

Si $\lambda_S = 1 \Longrightarrow \lambda_L = \sqrt[3]{k_1} = \lambda_{\max}$

Datos concretos:

Para Q = 6,5 KN/m^2 $\qquad f_{cd} = \frac{200}{1{,}5} = 133\,Kp/cm^2 \longrightarrow \gamma_f = 1{,}6$

Q_d = 1,6 x 6,5 KN/m^2 $\qquad f_{yd} = \frac{4100}{1{,}1}\,Kp/cm^2$

$k_1 = 98769$

$k_2 = 3913$ $\Longrightarrow$

$\lambda_{\lim} = 25{,}23$
$\lambda_{\max} = 46{,}22$

La flecha de 1/500 es excesiva al considerar la carga total. Como lo que importa es la flecha activa, lo razonable en un caso práctico sería considerar $\frac{\delta}{L}$, entre $\frac{1}{350}$ y $\frac{1}{400}$;

Por lo que λ_{lim} estaría entre $25{,}23.\frac{50}{350} = 36$ y $25{,}23.\frac{50}{400} = 31{,}5$

En un caso práctico, un valor en torno a λ_{lim}= 30 sería razonable.
Esto obligaría a reforzar el armado en tramos extremos si no se varía el canto.
Si vemos las relaciones de esbeltez recomendadas por el eurocódigo (CEB-FIB-1990, artículo 7.5.2.3) podemos ver que los números concuerdan.

Para piezas flectadas de hormigón armado **sin esfuerzo axil** se puede adoptar la siguiente expresión:

$$\frac{1}{d} \leq \lambda = \lambda_0 \cdot k_T \cdot k_l \cdot \left(\frac{400}{f_{yk}}\right)$$; esta no es más que una versión nada clara de $\frac{\delta}{L} = k.\varepsilon.\lambda$

λ_0 es un coeficiente que se toma de la tabla 7.5.2
k_T vale 1,0 para secciones con una relación ala/alma menor que 3, y 0,8 si dicha relación es mayor que 3.
k_l Mínimo [7/*l* , 1] con *l* en m.
f_{yk} es la tensión de límite elástico de la armadura Pasiva en Mpa.

Cuantía geométrica de armado: $\rho = 1{,}5\%$; $\rho = \frac{A_S}{b.d} < 0{,}5\%$

SISTEMA ESTRUCTURAL	HORMIGÓN SOMETIDO A TENSIONES elevadas	HORMIGÓN SOMETIDO A TENSIONES pequeñas
1.- Vigas simplemente apoyadas o losas uni o bidireccionales simplemente apoyadas.	18	25
2.- Tramo extremo de una viga continua o losa bidireccional en el sentido del lado más largo.	23	32
3.- Tramo interior de una viga continua o losa unidireccional o bidireccional.	25	35
4.- Losa sobre pilares aislados, sin vigas. Comprobación según la dimensión mayor.	21*	30*
5.- Voladizo	7	10

* Estos valores deberán comprobarse

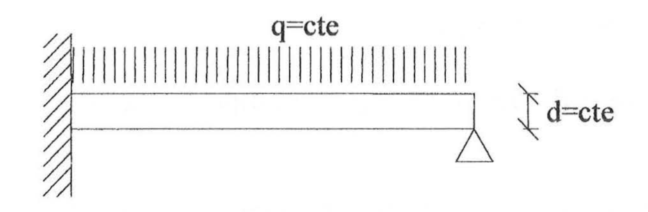
TABLA 7.5.2

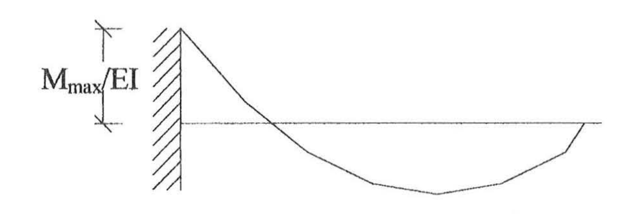
Conviene ser prudente con el valor de la esbeltez. Las patologías debidas a un exceso de esbeltez son demasiado habituales en nuestras obras.

EJERCICIO 4 (TEST Nº 4 CURSO 98-99)

Calcular la esbeltez límite de la viga empotrada-apoyada de canto y dimensionado constante y carga uniforme, para una $\varepsilon_{máx} = 0{,}8.10^{-3}$
Y una condición de rigidez de $\delta/L = 1/500$

Si suponemos conocido el valor de la deformación vertical máximo: $\delta_{máx} = \dfrac{q.L^4}{185.EI}$





Gráfica de curvaturas

Si suponemos que se trata de un material elástico la curvatura χ puede expresarse como:

$$\chi = \frac{M}{EI}$$

Dado que EI es constante, la gráfica de curvaturas es proporcional a la gráfica de momentos.

$$\delta = \frac{q.L^4}{185.EI}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{qL^2}{EI.8}.L.\frac{8}{185} \qquad \left\{ \frac{qL^2}{EI.8} = \frac{M_{\max}}{EI} = \frac{2\varepsilon_{MAX}}{h} = \frac{2\varepsilon}{h} \right.$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{2\varepsilon}{h}.L.\frac{8}{185} = \lambda.\varepsilon.\frac{8}{185}$$

$\left\{ \dfrac{\delta}{L} = \dfrac{1}{500} \right.$ de ahí, $\dfrac{\delta}{L} = \lambda.\varepsilon.\dfrac{8}{185}$ relación lineal de los parámetros. En general: $\delta/L = k.\varepsilon.\lambda$

$\varepsilon = 0{,}8.10^{-3}$

Se ha despreciado la deformación por cortante que produce un término no lineal: $\dfrac{1}{\lambda}$, pero que suele ser irrelevante en vigas de alma llena.

$$\frac{1}{500} = \lambda.0{,}8.10^{-3}.\frac{16}{185} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{185.10^3}{500.0{,}8.16} = 28{,}9 \approx 29$$

$\boxed{\lambda_{lim} = 29}$

TABLA RESUMEN DE ESBELTECES LÍMITE PARAMATERIALES ELÁSTICOS (DEFORMACIÓN POR MOMENTO FLECTOR):

-Canto constante $\quad \delta / L = k.\varepsilon.\lambda$

- $\varepsilon_{max} = 0{,}8.10^{-3}$

HIPÓTESIS	CÁLCULO ELÁSTICO		CÁLCULO PLÁSTICO	
	Dimensionado constante	Dimensionado estricto	Dimensionado constante	Dimensionado estricto
	$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500}$		$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{500}$	
	$\lambda_{lim} = 12$ $k = \frac{5}{24} \approx 0{,}21$	$\lambda_{lim} = 10$ $k = \frac{1}{4}$		
	$\lambda_{lim} = 28{,}9$ $k = \frac{1}{11{,}56}$	$\lambda_{lim} = 11{,}25$ $k = \frac{1}{4{,}5}$	$\lambda_{lim} = 13{,}84$ $k = \frac{1}{5{,}53}$	
	$\lambda_{lim} = 40$ $k = \frac{1}{16}$	$\lambda_{lim} = 20$ $k = \frac{1}{8}$	$\lambda_{lim} = 15$ $k = \frac{1}{6}$	
	$\lambda_{lim} = 15$ $k = \frac{1}{6}$	$\lambda_{lim} = 10$ $k = \frac{1}{4}$		
	$\lambda_{lim} =$ $k =$	$\lambda_{lim} = 11{,}25$ $k = \frac{1}{4{,}5}$		
	$\lambda_{lim} = 30$ $k = \frac{1}{12}$	$\lambda_{lim} = 20$ $k = \frac{1}{8}$		

HIPÓTESIS	CÁLCULO ELÁSTICO		CÁLCULO PLÁSTICO	
	Dimensionado constante	Dimensionado estricto	Dimensionado constante	Dimensionado estricto
	$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{250}$		$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{250}$	
Voladizo con carga uniforme	$\lambda_{lim}=10$ $k=\frac{1}{2}$	$\lambda_{lim}=5$ $k=1$	—	
Voladizo con carga puntual en el extremo	$\lambda_{lim}=7,5$ $k=\frac{2}{3}$	$\lambda_{lim}=5$ $k=1$	—	

NOTA: En cálculo plástico existe según las normas MV un coeficiente adicional de 1,12 con lo que podíamos tomar:

$$\lambda_{lim}\begin{cases}13,84\,.\,1,12=15,5\\ 15\,.\,1,12=16,8\end{cases}$$

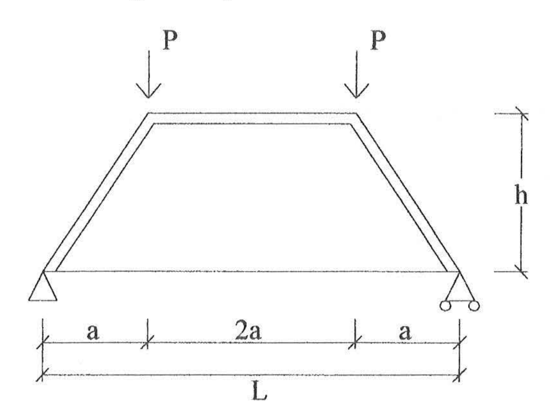
Pero eso supone que $\varepsilon=\frac{0,8.10^{-3}}{1,12}=0,714.10^{-3}$ en ambos casos.

Por otra parte hay que hacer notar que, en el caso elástico, hablamos de empotramiento perfecto.
De existir giro, los valores pueden variar de forma notable. Esto puede ser especialmente crítico en el caso de los grandes voladizos.

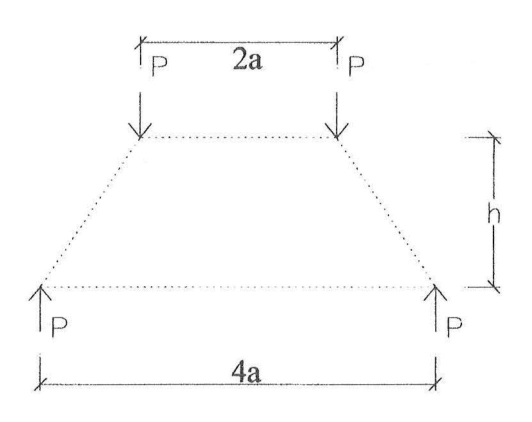
Como puede verse, en diseño elástico y dimensionado estricto el tipo de carga no es una variable. Es un problema geométrico consistente en ajustar arcos de circunferencia a las condiciones de contorno según cada caso.

EJERCICIO 3 (TEST Nº 3 CURSO 98-99).

Calcular la esbeltez óptima (L / H) de la estructura antifunicular de la figura. (No consideraremos pandeo).



Sistema de cargas:



La diferencia de potenciales responde a:

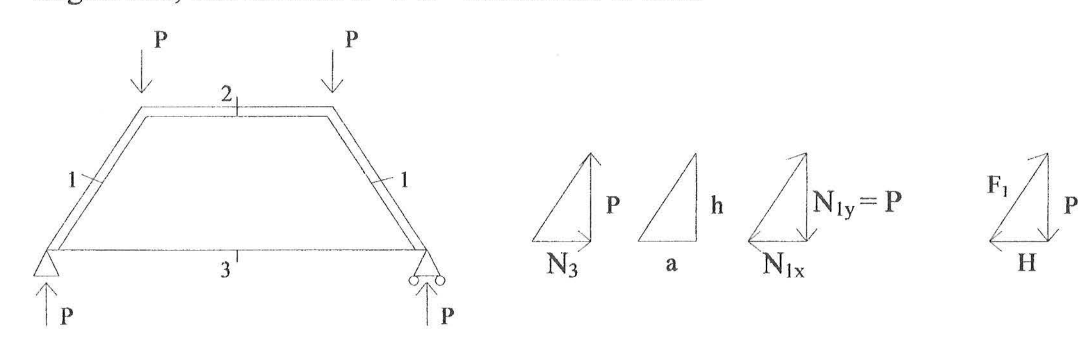
$$\left|\omega^{+}-\omega^{-}\right|=\left|K_M^{+}-K_M^{-}\right|=cte$$

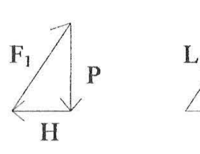
$K_M^{+}=0$

$K_M^{-}=2\cdot P\cdot h=\text{cte}$

$$\left|\omega^{+}-\omega^{-}\right|=2\cdot P\cdot h$$

Según esto, con calcular ω^{+} ó ω^{-} tendríamos el total.





Por semejanza de triángulos: $N_3=\dfrac{a.P}{h}$

La cantidad de estructura total será la suma de la vertical y la horizontal: $\omega_T=\overline{\omega}+\omega|$

Hacemos el cálculo barra por barra:

$$\omega_3=\frac{a.P}{h}.4a=P.\frac{L}{h}.\frac{L}{4}=P.L.\lambda.\frac{1}{4} \quad \text{porque } a=\frac{L}{4}$$

$\omega_2=\dfrac{1}{2}.\omega_3=P.L.\lambda.\dfrac{1}{8}$ puesto que la longitud de la barra 2 es la mitad de la de la barra 3, y la fuerza a la que están sometidas es la misma.

$$\omega_1 = \underbrace{P.h}_{\omega_1|} + \underbrace{\frac{P.a}{h}.a}_{\omega_1} = P.h.\frac{L}{L} + P.\frac{L}{h}.L.\frac{1}{16}$$

$$\omega_1 = P.L.\frac{1}{\lambda} + P.L.\lambda.\frac{1}{16}$$

Las barras 2 y 3 sólo tienen cantidad de estructura horizontal, la 1 tiene horizontal y vertical, y son dos barras iguales. Entonces:

$$\omega = \omega_3 + \omega_2 + 2\omega_1 = P.L.\lambda.\frac{1}{4} + P.L.\lambda.\frac{1}{8} + P.L.\frac{2}{\lambda} + P.L.\lambda.\frac{1}{8} =$$

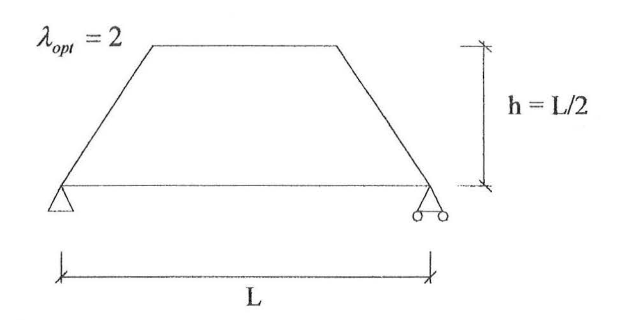
$$= P.L.\lambda.\frac{1}{2} + 2P.L.\frac{1}{\lambda} = P.L\left[\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{\lambda}\right] = \omega$$

$$\boxed{\omega = P.L.\left[\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{\lambda}\right]}$$

Buscamos la cantidad mínima de estructura, para lo cual derivamos:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow P.L.\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\lambda^2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda_{op}{}^2 = 4 \qquad \lambda_{opt} = 2$$



$$\omega = P.L\left[\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{\lambda}\right]$$

Otra forma de calcular λ_{opt} es a través de la expresión general de la cantidad de estructura.

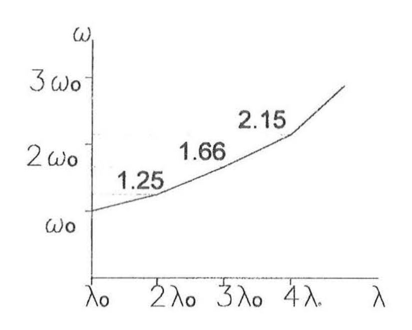
$$\omega = \wp_{TOTAL}.L\left[A\lambda + \frac{B}{\lambda}\right]$$

En nuestro caso: $\wp_{TOTAL} = 2.P$; $\Longrightarrow$ $\omega = \wp_{TOTAL}.L\left[\frac{\lambda}{4} + \frac{1}{\lambda}\right]$; A = 1/4

B = 1

$$\lambda_{opt} = \sqrt{B/A} = \sqrt{4} = 2$$

En la siguiente figura podemos ver la variación de la cantidad de estructura con el incremento de esbeltez.



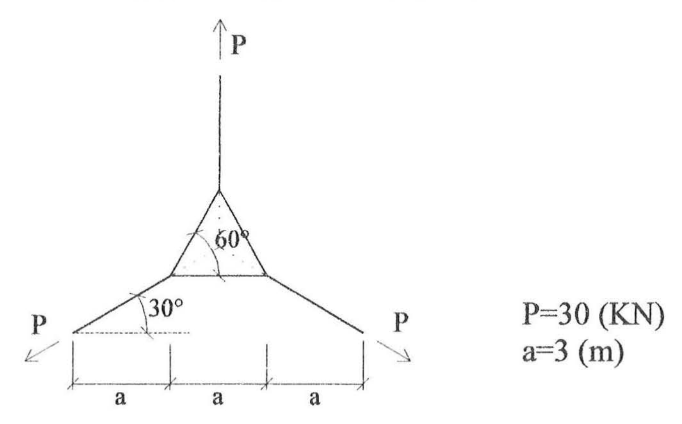
Pasar de λ_{opt} a $2\,\lambda_{opt}$ nos conduce a un incremento de la cantidad de estructura de sólo un 25%. Dado que no hemos considerado el pandeo, el incremento de esbeltez puede ser muy favorable de cara a la repercusión de uniones y al pandeo, por lo que parece claro que la esbeltez óptima real estará en torno a 4.

$\lambda_{OPT\ REAL} \approx 4$.

Esto es concordante con las proporciones de grandes estructuras de este tipo.

EJERCICIO 1 (TEST Nº 1 CURSO 99-00).

Calcular la cantidad de estructura de la estructura de la figura.



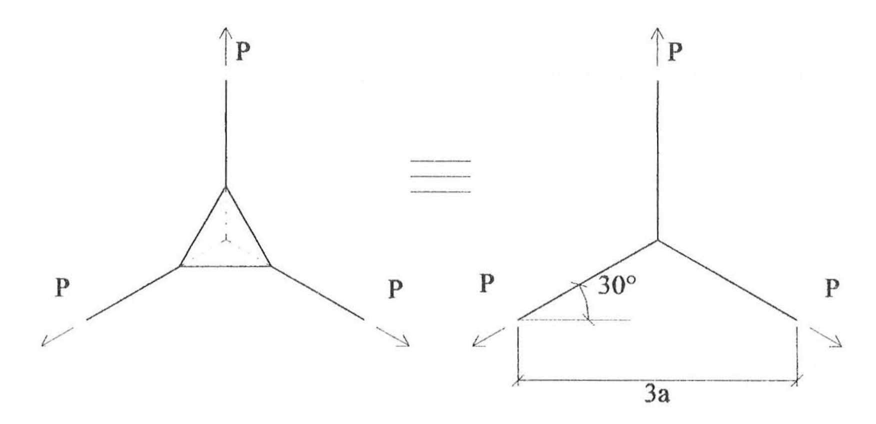
P=30 (KN)
a=3 (m)

Para un mismo problema estructural el número de Maxwell, K_M, es constante.

$$\left|\omega^+ - \omega^-\right| = \left|K_M^+ - K_M^-\right| = cte$$

En este caso $\begin{cases} K_M^- = 0 \\ \omega^- = 0 \end{cases}$; $\Longrightarrow$ $\left|\omega^+\right| = \left|K_M^+\right|$

Es decir, la cantidad de estructura es igual al nº de Maxwell, que no depende de la solución estructural adoptada, sino del sistema de cargas exteriores. Esto quiere decir que cualquier otra estructura que resuelva el sistema será equivalente y, además, mínima.



$$K_M = \left|\omega^+ - \omega^-\right| = \left|\omega^+\right| = \left|K_M^+\right|$$

$$K_M^+ = 3 \cdot \left(P \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\right) = 3 \cdot P \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot P \cdot a$$

$$\omega = \omega^+ = K_M^+ = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot P \cdot a$$

$$\boxed{\omega = 467{,}65 KN.m}$$

El ejemplo es especialmente ilustrativo. En cualquier estructura que existan sólo tracciones o sólo compresiones, el diseño de la estructura es irrelevante en lo tocante a eficiencia estructural. Además sabemos que todos los diseños son mínimos. En estructuras tensadas, y si miramos sólo la zona traccionada, sabemos entonces que tenemos libertad de diseño. Habrá que pensar sólo en lo constructivo.

CUADERNO

120.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

jherrera@aq.upm.es

